

# Técnicas Matemáticas da Física

Rui Manuel A. Dilão



Versão de 1 de Setembro 2018

This work is licensed under a [Creative Commons](#) “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.



# Índice

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>1 Medida e integração: o integral de Lebesgue</b>	<b>1</b>
1.1 Conjuntos e funções mensuráveis . . . . .	1
1.2 Medida de Lebesgue . . . . .	7
1.3 Conjuntos de medida nula . . . . .	11
1.4 Integral de Lebesgue . . . . .	13
1.5 A dimensão de Hausdorff . . . . .	16
1.6 Exercícios . . . . .	18
<b>2 Espaços de Hilbert</b>	<b>21</b>
2.1 Espaços pré-Hilbertianos . . . . .	21
2.2 Espaços de Hilbert . . . . .	26
2.3 Espaços de Lebesgue . . . . .	30
2.4 Operadores . . . . .	33
2.5 Exercícios . . . . .	34
<b>3 Bases de espaços de Hilbert</b>	<b>35</b>
3.1 Bases de espaços de Hilbert . . . . .	35
3.2 Polinómios de Legendre . . . . .	39
3.3 Teoremas fundamentais . . . . .	41
3.4 Exercícios . . . . .	45
<b>4 Operadores</b>	<b>47</b>
4.1 Operadores . . . . .	47
4.2 Operadores adjuntos, hermíticos e unitários . . . . .	49
4.3 Operadores de Sturm-Liouville . . . . .	52
4.4 Exercícios . . . . .	54

<b>5</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>57</b>
5.1	Séries de Fourier . . . . .	57
5.2	Fenómeno de Gibbs . . . . .	62
5.3	Convergência das séries de Fourier . . . . .	65
5.4	Exercícios . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Distribuições</b>	<b>71</b>
6.1	Funcionais lineares e distribuições . . . . .	71
6.2	Derivadas de distribuições . . . . .	76
6.3	Exercícios . . . . .	82
<b>7</b>	<b>A equação das ondas I: oscilações transversais</b>	<b>83</b>
7.1	A equação das ondas . . . . .	83
7.2	Soluções de equilíbrio da equação das ondas . . . . .	86
7.3	Soluções estacionárias da equação das ondas. . . . .	89
7.4	Teorema de d'Alembert. . . . .	95
7.5	Energia de ondas transversais . . . . .	99
7.6	Ressonância . . . . .	101
7.7	Equilíbrio de uma membrana rectangular . . . . .	104
7.8	Oscilações de uma membrana circular . . . . .	106
7.9	A equação das ondas e a transformação de Lorentz . . . . .	110
7.10	Soluções fortes e fracas da equação das ondas . . . . .	111
7.11	Exercícios . . . . .	113
<b>8</b>	<b>A transformada de Fourier e as funções de Green</b>	<b>117</b>
8.1	A transformada de Fourier . . . . .	117
8.2	A relação de incerteza de Heisenberg . . . . .	126
8.3	A fórmula da soma de Poisson. . . . .	129
8.4	Funções de Green . . . . .	130
8.5	Exercícios . . . . .	137
<b>9</b>	<b>A equação do calor</b>	<b>141</b>
9.1	A equação do calor em meios infinitos . . . . .	141
9.2	A equação do calor em meios finitos . . . . .	147
9.3	Uma simetria da equação do calor . . . . .	148
9.4	Exercícios . . . . .	149

<b>10 A transformada de Laplace</b>	<b>153</b>
10.1 A transformada de Laplace . . . . .	153
10.2 Funções de Green . . . . .	160
10.3 Exercícios . . . . .	163
<b>11 Reflexão, refração e dispersão de ondas</b>	<b>165</b>
11.1 Reflexão e refração de ondas transversais . . . . .	165
11.2 Lei de Snell . . . . .	168
11.3 Velocidade de fase . . . . .	171
11.4 Velocidade de grupo . . . . .	173
11.5 Exercícios . . . . .	175
<b>12 A transformada de Fourier discreta</b>	<b>177</b>
12.1 A transformada de Fourier discreta . . . . .	177
12.2 Exercícios . . . . .	183
<b>13 Equações às derivadas parciais de segunda ordem</b>	<b>185</b>
13.1 Equações às derivadas parciais de segunda ordem . . . . .	185
13.2 Curvas características . . . . .	192
13.3 Curvas características da equação das ondas: o efeito Doppler	194
13.4 Exercícios . . . . .	197
<b>14 Fonões e solitões</b>	<b>199</b>
14.1 Ondas solitárias . . . . .	199
14.2 Ondas lineares em cristais: fonões . . . . .	201
14.3 Ondas não lineares em cristais: solitões . . . . .	206
14.4 Exercícios . . . . .	211
<b>15 Caos</b>	<b>213</b>
15.1 Caos . . . . .	213
15.2 Medidas invariantes, probabilidades, caos e ergodicidade . . .	220
15.3 Bifurcações . . . . .	224
15.4 Sensibilidade em relação às condições iniciais . . . . .	225
15.5 Exercícios . . . . .	229
<b>A O método dos resíduos</b>	<b>231</b>
<b>B Guia para a resolução dos exercícios</b>	<b>235</b>



# Prefácio

A análise funcional dá-nos um conjunto de ferramentas matemáticas importantes para analisar do ponto de vista teórico, experimental e numérico os sistemas da Física e da Engenharia. As suas técnicas são particularmente úteis na determinação e no estudo de soluções de equações às derivadas parciais, na teoria dos operadores e das funções generalizadas ou distribuições, na construção de algoritmos de integração numérica e de processamento e análise de sinais.

Os primeiros seis capítulos deste livro são uma introdução informal à análise funcional, incluindo a análise de Fourier. O objectivo foi o de fazer um primeiro contacto com a teoria da medida e da integração, sem alguns dos seus aspectos mais formais. Do capítulo 7 ao capítulo 13, estudam-se as equações das ondas, do calor e a classe das equações de Laplace, assim como as técnicas mais usadas na obtenção das suas soluções.

Os últimos dois capítulos abordam os solitões e alguns aspectos da teoria dos sistemas caóticos, que poderão ser leccionados em formato de seminário. Estes assuntos desenvolveram-se significativamente nos últimos anos e têm aplicações importantes tanto na Física como na Engenharia.

No Apêndice A resumem-se alguns resultados da teoria dos resíduos e no Apêndice B dão-se indicações para a resolução dos exercícios.

A escolha destas matéria teve em conta as necessidades técnicas básicas das várias disciplinas da Física e da Engenharia, não se sobrepondo a assuntos mais específicos como sejam o estudo das equações de Maxwell, de Schrödinger ou de Navier-Stokes. O estudo destas equações é feito em detalhe em cadeiras mais especializadas.

Lisboa, Setembro de 2018





## Apêndice A

# O método dos resíduos

Relembrem-se as definições básicas da teoria das funções analíticas e do método dos resíduos.

Uma função analítica ou *holomorfa* numa região aberta  $D$  do plano complexo  $\mathbb{C}$  é representada por uma série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

em que o raio de convergência da série é  $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n / a_{n+1}$ . Se  $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{1/n}$  é finito, então,  $R = 1/\rho$ .

Seja  $\gamma$  uma curva fechada simples (sem intersecções) no plano complexo. Se a curva  $\gamma$  tem uma representação paramétrica monótona,  $\gamma = x(t) + iy(t)$ , para  $t_0 \leq t \leq t_1$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

O índice de uma curva fechada  $\gamma$  em torno de um ponto  $z_0 \in \mathbb{C}$  é o número

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Em geral, tem-se que,  $I(\gamma, z_0) = n$ , em que  $n$  é um número inteiro. Se  $I(\gamma, z_0) = n > 0$ , então o ponto  $z_0$  está no interior de  $\gamma$  e a curva é percorrida no sentido anti-horário, figura A.1. Se  $I(\gamma, z_0) = 0$ , o ponto  $z_0$  está no exterior de  $\gamma$ .

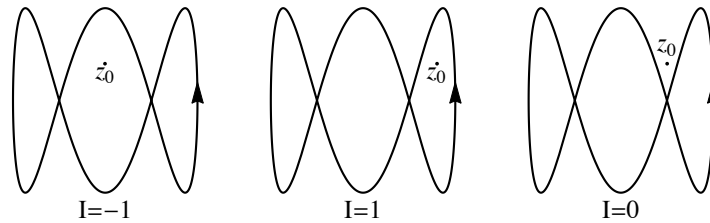


Figura A.1: Índice de uma curva fechada em torno de um ponto  $z_0$  do plano complexo.

**Teorema A.1** (Teorema de Cauchy). *Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são duas curvas fechadas simples numa região do plano complexo em que  $f(z)$  é analítica, então*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \quad e \quad \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0.$$

Se uma função complexa  $f(z)$  tem um número finito ou uma infinidade numerável de pólos isolados ou singularidades,  $z_0, z_1, \dots$ , diz-se que a função  $f(z)$  é *meromorfa* no domínio aberto considerado se, em torno de cada pólo  $z_m$ , existe um desenvolvimento de Laurent com um raio de convergência finito. Isto é, em torno de  $z_m$ , a função  $f(z)$  escreve-se na forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-z_m)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_m)^n,$$

em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_m)^{n+1}} dz$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-z_m)^{n-1} dz$$

e  $\gamma$  é uma curva fechada em torno de  $z_m$ . Em geral, não se pode utilizar a fórmula de Taylor para a determinação dos  $a_n$ , pois a função  $f(z)$  não está bem definida nas singularidades.

Um pólo  $z_m$  de uma função meromorfa  $f$  é uma singularidade isolada se apenas um número finito de constantes  $b_n$  é diferente de zero. Um pólo  $z_m$  é de ordem  $k$  se  $b_n = 0$  para  $n > k$ . Um pólo é simples quando se tem apenas  $b_1 \neq 0$ . Uma singularidade é essencial se existe um número infinito de  $b_k \neq 0$ .

O coeficiente  $b_1$  do desenvolvimento de Laurent de  $f$  designa-se por *resíduo* do pólo  $z_m$ .

O resíduo de uma função  $f = \phi_1/\phi_2$ , com um pólo simples no ponto  $x_0$ , pode ser calculado directamente pela fórmula,  $Res(f, x_0) = \phi_1(x_0)/\phi_2'(x_0)$ , desde que  $\phi_2'(x_0) \neq 0$ . Se  $x_0$  é um pólo de ordem  $n$ ,

$$Res(f, x_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x-x_0)^n f(x).$$

**Teorema A.2** (Teorema Integral de Cauchy). *Seja  $\gamma$  uma curva fechada simples numa região do plano complexo em que  $f(z)$  é meromorfa. Se não existem pólos de  $f(z)$  sobre  $\gamma$  nem no interior da região delimitada por  $\gamma$ , então, para todo o  $z_0$  no interior de  $\gamma$ , tem-se que*

$$I(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

**Teorema A.3** (Teorema dos Resíduos). *Seja  $f(z)$  uma função meromorfa numa região do plano complexo. Se no interior de uma curva fechada  $\gamma$  existem pólos  $z_m$  de  $f(z)$  e se não existem pólos de  $f(z)$  sobre  $\gamma$ , então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_m I(\gamma, z_m) Res(f, z_m).$$

Veja-se como aplicar o teorema dos resíduos ao cálculo de integrais definidos. Seja uma função  $f(x)$  de uma variável real e suponha-se que a sua extensão ao plano complexo é uma função meromorfa.

**Teorema A.4.** *Se  $f(z)$  não tem pólos sobre o eixo real e se  $|f(z)| \leq M/|z|^2$ , para  $|z| > R$ , então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{m: Im(z_m) > 0} Res(f, z_m) = -2\pi i \sum_{m: Im(z_m) < 0} Res(f, z_m).$$

**Teorema A.5.** *Se  $|f(z)| \leq M/|z|^2$ , para  $|z| > R$ , então*

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 2\pi i \sum_{m: Im(z_m) > 0} Res(f, z_m) + \pi i \sum_{m: Im(z_m) = 0} Res(f, z_m) \\ &= -2\pi i \sum_{m: Im(z_m) < 0} Res(f, z_m) - \pi i \sum_{m: Im(z_m) = 0} Res(f, z_m). \end{aligned}$$

**Teorema A.6.** Se  $|f(z)| \leq M/|z|$ , para  $|z| > R$ , então

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx = \begin{cases} 2\pi i \sum_{m: \text{Im}(z_m) > 0} \text{Res}(e^{iax} f, z_m) \\ + \pi i \sum_{m: \text{Im}(z_m) = 0} \text{Res}(e^{iax} f, z_m), & \text{se } a > 0 \\ -2\pi i \sum_{m: \text{Im}(z_m) < 0} \text{Res}(e^{iax} f, z_m) \\ - \pi i \sum_{m: \text{Im}(z_m) = 0} \text{Res}(e^{iax} f, z_m), & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

O teorema A.6 é ainda válido para integrais da forma

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos ax f(x) dx \quad \text{e} \quad v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin ax f(x) dx.$$

Por exemplo, o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

não pode ser calculado por técnicas de resíduos. Isto deve-se ao facto de  $|e^{-z^2}| = 1$ , para  $\arg z = \pi/4$ , não se verificando nenhuma das condições dos teoremas A.3-A.6.

## Apêndice B

# Guia para a resolução dos exercícios

**1.1)** Decorre directamente da definição de função contínua e da sua tradução em termos de conjuntos abertos e fechados. No entanto, faça-se a demonstração. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Naturalmente,  $X$  e  $\mathbb{R}$  são ambos espaços euclidianos. Queremos mostrar que  $f$  é contínua se, e somente se, a pré-imagem de um conjunto aberto é sempre aberta. Vamos assumir a definição tradicional de função contínua:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X : |x - x_0| < \delta) \implies (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Comece-se por assumir que  $f$  é contínua em  $x_0$  e que  $A \subset \mathbb{R}$  é um conjunto aberto do contradomínio de  $f$ . Quer-se mostrar que  $f^{-1}(A)$  é um conjunto aberto. Seja  $x_0 \in f^{-1}(A)$ . Assim,  $x_0$  pertence ao domínio da função e  $f(x_0) \in A$ . Como, por hipótese,  $A$  é aberto, existe um intervalo aberto  $I = \{y : |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$  contido em  $A$ . Por continuidade, para  $\delta$  suficientemente pequeno, existe um intervalo  $J = \{x \in X : |x - x_0| < \delta\}$  tal que  $f(J) \subset I$ . Como  $J \subset f^{-1}(A)$  e  $f^{-1}(A)$  é a união de intervalos abertos, então  $f^{-1}(A)$  é necessariamente aberto.

Assuma-se agora que  $f^{-1}(A)$  é aberto, sempre que  $A$  é aberto. Escolha-se  $I = \{y : |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$ . Como, por hipótese  $f^{-1}(A)$  é aberto e  $x_0 \in f^{-1}(A)$ , existe um intervalo  $J$ , centrado em  $x_0$  que está contido em  $f^{-1}(A)$ . Faça-se  $J = \{x \in X : |x - x_0| < \delta\}$ . Escolhendo  $\delta$  suficientemente pequeno, tem-se que  $f(x \in J) \in I$ . Isto é,  $\{x : |x - x_0| < \delta\}$  implica que  $\{y : |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$ . Assim,  $f$  é contínua em  $x_0$ .

**1.2)** Por exemplo, escreva-se o conjunto  $\{x : (f + g) > a\}$  na forma de intersecções de conjuntos envolvendo apenas  $f$  e  $g$ :

$$\{x : (f + g) > a\} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) > q\} \cap \{x : g(x) > a - q\}).$$

Nos restantes casos tem-se:

$$\begin{aligned} \{x : f^2 > a\} &= \{x : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{a}\}, \text{ com } a \geq 0 \\ \text{Se } a > 0: \{x : 1/f > a\} &= \{x : f(x) < 1/a\} \cap \{x : f(x) > 0\} \\ \text{Se } a = 0: \{x : 1/f > a\} &= \{x : f(x) > a\} \\ \text{Se } a < 0: \{x : 1/f > a\} &= \{x : f(x) < 1/a\} \cap \{x : f(x) < 0\}. \end{aligned}$$

No caso do produto, use-se a relação  $fg = ((f + g)^2 - (f - g)^2)/4$ .

**1.3)** Comece-se por enumerar os elementos do conjunto e faça-se uma cobertura com intervalos de largura  $\varepsilon/2^n$ .

**1.4)** Sejam  $N_1$  e  $N_2$  o número de pontos no interior do círculo e do quadrado, respectivamente. Então,  $\pi \approx 4N_1/N_2$ .

**1.5)**  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .

**1.6)**  $d = \log(5)/\log(10) = 0.6989$ ,  $d = 0$  e  $d = 1/2$ .

**1.7)**  $d = \log(4)/\log(3) = 1.2618$ .

**2.1)** Use-se a desigualdade  $|a + b| \leq |a| + |b|$  e as propriedades das séries de potências.

**2.2)** Basta mostrar que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g| dx$  é finito.

**2.3)** Basta mostrar que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g|^2 e^{-x^2} dx$  é finito. Verifique as propriedades do produto interno.

**2.4)**  $\alpha > -1/2$  e  $\alpha > 1/2$ .

**3.1)** Na alínea b), faz-se a integração por partes e use-se o resultado da alínea a). Na alínea c), use-se o resultado de b), calcule-se o integral e faça-se a substituição de variável  $x = \sin(\theta)$ .

**3.2)**  $\phi_0(x) = 1$ ,  $\phi_1(x) = x - 1$  e  $\phi_2(x) = (x^2 - 4x + 2)/2$ .

**3.3)** Começa-se por determinar os primeiros três elementos de uma base ortonormal de  $L^2([0, 1])$ . Em seguida, mostra-se que  $\sin(\pi x) \simeq -0.0504 + 4.1225x - 4.1225x^2$ .

**3.4)** Encontre-se uma função  $f \in L^2([0, 2\pi])$ , com  $f \neq 0$ , para a qual  $\langle f, \sin nx \rangle = 0$  e  $f \neq \sin nx$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.1)** Introduza a métrica natural em  $X$  and  $Y$ . Se  $f$  é contínua, tem-se  $|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - (x)^*| < \varepsilon$ . Seja uma sucessão  $\{x_n\}$  convergente para  $x^*$ . Por definição de limite, existe um  $N$  tal que, para  $n > N$ ,  $|x_n - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - (x)^*| < \varepsilon$ . Os quantificadores universais garantem a conclusão. A demonstração inversa tem um argumento semelhante.

**4.2)** Se  $K = F + iG : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , o operador  $T$  é hermítico se  $F(x, y) - iG(x, y) = F(y, x) + iG(y, x)$ .

**4.3)** a) Espectro contínuo. Valores próprios:  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Vectores próprios:  $\cosh(\sqrt{\alpha}x)$ , se  $\alpha \geq 0$ ,  $\cos(\sqrt{|\alpha|x})$ , se  $\alpha \leq 0$ . b) Espectro discreto. Valores próprios:  $\alpha_n = -\pi^2 n^2 / a^2$ , com  $n \in \mathbf{N}$ . Vectores próprios:  $\sin(n\pi x/a)$ . c) Espectro discreto. Valores próprios:  $\alpha_n = -\pi^2 n^2 / a^2$ , com  $n \geq 0$ . Vectores próprios:  $\cos(n\pi x/a)$ . d) Espectro vazio. O operador é hermítico nos casos b) e c).

**4.4)** a)  $A_{mn}^* = A_{nm}$ . b)  $A_{nn} = 1/2$  e  $A_{nm} = i/(2\pi(n - m))$ , com  $n, m \in \mathbb{Z}$ . O operador  $T$  é hermítico.

**4.5)**  $A_{nn} = 2\pi n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .  $A_{nm} = 0$ , se  $n \neq m$ .

**4.6)** Por cálculo directo de  $\langle T\phi, \psi \rangle$ .

**4.7)** Comece por expandir os operadores  $U_1$  e  $U_2$  em série de Taylor e calcule os operadores auto-adjuntos respectivos.

**4.8)** Por cálculo directo da exponencial de uma matriz.

**4.9)** Por cálculo directo de  $\|Pf\|$ .

**4.10)** Demonstração análoga à do caso de um operador hermítico.

**4.11)** Por aplicação directa do lema 4.4.

**5.1)** Comece-se por multiplicar e dividir a série de Fourier na forma real por  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  e reorganjem-se os termos.

**5.2)** Prolongue a função  $\sin(x)$  no intervalo  $[0, \pi]$  como uma função par no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .  $\sin(x) = 2/\pi + (2/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx (1 + (-1)^n)/(1 - n^2)$ .

**5.3)** a)  $|x| = \pi/2 + (2/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n - 1) \cos(nx)/n^2$ , para  $x \in [-\pi, \pi]$ . b)  $x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(nx)/n$ , para  $x \in [-\pi, \pi]$ . c)  $\cos^3 x = 3 \cos x/4 + \cos 3x/4$ . d)  $a_0 = 2$ ,  $a_n = b_n = 0$  para  $n \geq 1$ . e)  $a_0 = 2$ ,  $a_n = b_n = 0$  para  $n \geq 1$ .

**5.4)**  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1) = \pi/4$ . Calculem-se os desenvolvimentos de Fourier das funções  $f(x) = x^4$  e  $f(x) = 1$ , se  $0 < x < \pi$ , e  $f(x) = -1$ , se  $-\pi < x < 0$ .

**5.5)** Usem-se as relações entre as funções trigonométricas e a exponencial.

**5.6)** Introduza-se a forma integral dos coeficientes de Fourier em  $f_N$  e some-se a série de potências. Em particular,  $D_N(0) = 2N + 1$ .

**5.7)** Resolução análoga ao exercício anterior. Em particular,  $\Phi_n(0) = n/(2\pi)$ .

**5.8)**  $A_{(n,m),(m,n)} = 1$ . Nos outros casos, os elementos da matriz são nulos.

**5.9)**  $f * g = 2\pi \sum_n a_n b_n e^{int}$ , em que  $f = \sum_n a_n e^{int}$  e  $g = \sum_n b_n e^{int}$ .

**5.10)**  $f = \langle x, \mu \rangle$ , em que  $\mu = (1, 1/2, 1/3, \dots)$ .  $\|f(x)\| \leq \pi \|x\|/\sqrt{6}$ ,  $\|f(x)\| = |\sum_{n \geq 1} x_n/n|$ .

**6.1)** Majora-se  $|F_{f_n}(\phi) - \phi(0)|$  e calcula-se o limite  $n \rightarrow \infty$ .

**6.2)** Aplique-se o resultado do exercício 5.6 e o teorema 3.4.

**6.3)** Usa-se a distribuição regular gerada a partir de  $f_n(x) = \sqrt{n/\pi} e^{-nx^2}$  e faz-se o limite  $n \rightarrow \infty$ .

**6.4)**  $-f'(a)$ .

**6.5)**  $f'(x) = 2\delta(x)$ .

**6.6)**  $f''(x) = f''(x) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \delta'(x - x_i)$ .

**6.7)** Comece-se por escrever a equação do movimento na forma  $\ddot{x} = \sum \alpha_k \delta(t - kT)$ . Então,  $v(nT+) = v_0 + \sum_{k=0}^n \alpha_k/m$ , em que  $v(nT+)$  é a velocidade no instante imediatamente a seguir a  $nT$ .

**7.1)**  $c = 1.5 \text{ ms}^{-1}$ .

**7.2)**  $y(x) = gx(x-b)/(2c^2) + \sqrt{\ell^2 - b^2}(1-x/b)$ .

**7.3)**  $\phi(x) = gx^2(x-\ell)^2/(24c^2)$ .

**7.4)** Frequência dos modos próprios  $\omega_n = \sqrt{\lambda^2 - c^2\pi^2 n^2/\ell^2}$ , com  $n \geq 1$ . A solução geral é

$$\phi(x, t) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cosh(\omega_n t) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \sinh(\omega_n t).$$

**7.5)** O modo próprio de vibração número  $n \geq 1$  é

$$a_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{\pi n c}{\ell} t\right) + b_n \cos\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{\pi n c}{\ell} t\right).$$

**7.6)** A frequência de vibração do modo próprio  $n \geq 1$  é

$$\omega_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n\pi c}{\ell}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$



e a energia cinética é

$$E_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{32T\alpha^2}{n^2\pi^2\ell^2}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

**7.7)** A frequência de vibração do modo próprio  $n \geq 1$ , com  $n$  ímpar, é  $\omega_n = n\pi c/\ell$  e a energia cinética é

$$E_n = \frac{8A^2\rho}{n^2\pi^2} \sin^2\left(\frac{n\pi\delta}{\ell}\right) \approx \frac{8A^2\rho\delta^2}{\ell^2}$$

**7.8)** Os valores próprios são  $\lambda_{n,m} = -n^2\pi^2/a^2 - m^2\pi^2/b^2$ , a que correspondem os vectores próprios ou modos próprios

$$F_{n,m} = \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y/b),$$

em que  $n, m \geq 1$ .

**7.9)** Usa-se a solução de d' Alembert com prolongamento ímpar de  $f(x)$ .  
 $\phi(1/4, 1/20) = -3/16$ .

**7.10)** Mostra-se por substituição de variáveis,  $u = x \pm ct$ .

**7.11)** Semelhante ao que foi feito no texto, particularizando para o potencial gravítico.

**7.12)** Por derivação.

**7.13)** A solução geral é

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{c\pi n}{\ell} t + b_n \sin \frac{c\pi n}{\ell} t \right) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \\ &+ \frac{4\ell^2 g}{c^2\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{\pi n}{\ell} x, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx & \text{se } n \text{ é par} \\ a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx - \frac{4\ell^2 g}{c^2\pi^3(2n-1)^3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\text{e } b_n = (2/(c\pi n)) \frac{2}{\ell} \int_0^\ell g(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx.$$

$$7.14) V(x, y) = 8 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\pi(2n-1)^3 \sinh(2n-1)\ell} \sin(2n-1)x \cdot \sinh(2n-1)y.$$

7.15) Obtém-se a equação de Schrödinger. Os momentos canónicos calculam-se com  $p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}$  e  $p_{\psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*}$ . A densidade de energia calcula-se por  $\mathcal{H} = p_\psi \dot{\psi} + p_{\psi^*} \dot{\psi}^* - \mathcal{L}$ .

$$7.16) \mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \rho c^2 \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2} - V(\psi).$$

$$8.1) a) \mathcal{F} f = -i \sqrt{2/\pi} \frac{a}{(\xi^2 - a^2)} \sin\left(\frac{2\pi n \xi}{a}\right), |\mathcal{F} f|^2 = \frac{2a^2}{\pi(\xi^2 - a^2)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi n \xi}{a}\right).$$

$$b) \mathcal{F} f = \sqrt{2/\pi} \frac{\sin(a\xi)}{\xi}, |\mathcal{F} f|^2 = 2 \frac{\sin^2(a\xi)}{\xi^2} / \pi.$$

$$c) \mathcal{F} f = \sqrt{2/\pi} \frac{\xi}{a} (1 - \cos(a\xi)) \frac{1}{\xi^2}, |\mathcal{F} f|^2 = \frac{2c}{\pi a} (1 - \cos(a\xi))^2 \frac{1}{\xi^4}.$$

$$d) \mathcal{F} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - i\xi}, |\mathcal{F} f|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{a^2 + \xi^2}.$$

$$e) \mathcal{F} \sin(ax) = i \sqrt{\pi/2} (\delta(\xi + a) - \delta(\xi - a)), \mathcal{F} \cos(ax) = \sqrt{\pi/2} (\delta(\xi + a) + \delta(\xi - a)).$$

8.2) Desenvolva a exponencial complexa numa soma de funções trigonométricas.

8.3) Mostra-se por substituição de variáveis.

$$8.4) \mathcal{F} C = \sqrt{2\pi} \delta(\xi), \mathcal{F} \delta(x) = 1/\sqrt{2\pi}.$$

8.5) Use a propriedade da convolução.

$$8.6) \mathcal{F} f = \sqrt{2\pi} \sum_n c_n \delta(\xi - \frac{2\pi n}{L}), \text{ em que, } f = \sum_n c_n e^{i2\pi n x/L}.$$

$$8.7) a) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x} dx = i \sqrt{\pi/2} (-H(\xi) + H(-\xi)).$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{x^2 + a^2} dx = \sqrt{\pi/2} \frac{e^{-a|\xi|}}{a}.$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x} e^{iax}}{1+x^2} dx = \sqrt{\pi/2} e^{-|a-\xi|}.$$

$$8.8) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi/2.$$

8.9) Calcule directamente  $\mathcal{F}^4 f$ . O operador  $\mathcal{F}$  tem os valores próprios,  $\lambda = 1, -1, i, -i$ . Aos valores próprios  $\lambda = 1, -1$ , corresponde o vector próprio  $e^{(-x^2/2)}$ . Aos valores próprios  $\lambda = i, -i$ , corresponde o vector próprio  $e^{(x^2/2)}$ .

8.10) Aplique a transformada de Fourier, na variável espacial, à equação das ondas e resolva a equação diferencial ordinária.

$$8.11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \left( \frac{2}{1 - e^{2\pi a}} - 1 \right).$$

$$8.12) G(x, t) = -\sqrt{\pi/2} e^{-m|x|} / m.$$

$$8.13) G(t) = \sqrt{2\pi} t e^{i\lambda t}.$$

9.1) Integre a equação do calor entre 0 e  $\ell$  e aplique as condições fronteira.

9.2) a)  $T(x,t) = a_0/2 + \sum_{n \geq 1} a_n e^{-k\pi^2 n^2 t / \ell^2} \cos(\pi n x / \ell),$

$$a_n = (2/\ell) \int_0^\ell \cos(\pi n x / \ell) f(x) dx.$$

b)  $T_{eq} = (1/\ell) \int_0^\ell f(x) dx.$

9.3)  $T(x,t) = T_1 + x(T_2 - T_1)/\ell, \phi = \chi(T_1 - T_2)/\ell.$

9.4)  $T(x,t) = qt + a_0(0)/2 + \sum_{n \geq 1} a_n(0) e^{-k\pi^2 n^2 t / \ell^2} \cos \pi n x / \ell, f(x) = a_0(0)/2 + \sum_{n \geq 1} a_n(0) \cos \pi n x / \ell.$

9.5)  $T(x,t) = T_0 e^{-9k\pi^2 t / \ell^2} \cos 3\pi x / \ell + T_1 e^{-25k\pi^2 t / \ell^2} \cos 5\pi x / \ell.$

10.1) a)  $\mathcal{L}f = (1 + e^{-s\pi})/(1 + s^2).$  b)  $\mathcal{L}f = (1 - e^{-s})/(1 - e^{-2s}).$

10.2) Por cálculo directo.

10.3) Pela fórmula dos resíduos.

10.4)  $H(t - 1).$

10.5) a)  $x(t) = 0,$  para  $0 \leq t \leq 1;$   $x(t) = (1 - \cos(3 - 3t))/9,$  para  $t > 1.$  b)  $x(t) = \sinh t.$

10.6) a)  $x(t) = 2e^{t/2} - t - 2$  e  $y(t) = e^{t/2} - t - 1.$

10.7)  $x(t) = A(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)/(2\omega^2).$

10.8)  $G(x,t) = \frac{1+i}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\hbar t}} e^{imx^2/2\hbar t}.$

10.9)  $G(x,t) = \sqrt{2\pi} \delta(x - ct).$

11.1) A amplitude da onda transmitida é  $4Ac_2c_3/(c_1 + c_2)(c_2 + c_3).$

11.2) A intensidade relativa da luz refractada é 85.4% e a intensidade relativa da luz reflectida é 14.6%.

11.3)  $v_f = \omega/\sqrt{\omega^2 + \alpha}$  e  $v_g = 2c\sqrt{\omega^2 + \alpha}.$

11.4) Relação de dispersão  $k = \sqrt{2m\omega/\hbar}$  e  $v_f = \sqrt{\hbar\omega/2m}.$

11.5) a) Relação de dispersão,  $c^2 k^4 = -\omega^2, k = (1 - i)\sqrt{\omega/2c}, \omega/k = (1 + i)\sqrt{\omega c/2}, v_f$  calculada no texto e  $v_g = -(1 + i)\sqrt{2\omega c}.$  b)  $\lambda = \sqrt{\omega/2c}.$

12.1)  $k = 3, 6.$

12.2)  $k = 154.$

13.1) Forma canónica:

$$\frac{3}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right) = 0$$

13.2) Se  $M^2 < 1$  tem-se uma equação elíptica. Se  $M^2 = 1$  tem-se uma equação parabólica, e se Se  $M^2 > 1,$  tem-se uma equação hiperbólica.

**13.3)**  $\phi(x, t) = \phi_1(t - (1 + \varepsilon)x + x\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}) + \phi_2(t - (1 + \varepsilon)x - x\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2})$ .

**13.4)**  $\phi(x, t) = (2 + \sqrt{3})/(2\sqrt{3})f(x - t/(2 + \sqrt{3})) - (2 - \sqrt{3})/(2\sqrt{3})f(x - t/(2 - \sqrt{3}))$ .

**13.5)**  $\phi(x, t) = e^{-t}\psi(\ln x, t)$ .

**13.6)**  $\phi_{\eta\eta} = 6\eta$ .

**13.7)** Por inversão de (7.62) e substituição numa solução progressiva.

**14.1)** Desenvolva em série o cosh e analise as soluções dos vários sistemas lineares. Determine a relação de dispersão pela técnica do capítulo 11.

**14.2)** Faça o estudo qualitativo das órbitas de fase e relacione com as soluções da equação de Korteweg-de Vries.

**15.1)** O diagrama de bifurcações faz-se por cálculo numérico. O expoente de Lyapunov calcula-se pela definição.

**15.2)** Por cálculo numérico.

**15.3)** Por cálculo numérico.

**15.4)** Seleccione aleatoriamente parâmetros do intervalo  $[\mu_\infty, 1]$  e calcule o expoente de Lyapunov. Na região do parâmetro  $\mu \in [\mu_\infty, 1]$ , a probabilidade de encontrar uma dinâmica caótica é de 93%.

# Bibliografia

- [Adams e Fournier, 2003] R. Adams e J. Fournier, Sobolev spaces, Academic Press, 2003.
- [Appel, 2007] W. Appel, Mathematics for physics and physicists, Princeton, 2007.
- [Arfken e Weber, 2005] G. B. Arfken e H. J. Weber, Mathematical methods for physicists, Elsevier, 2005.
- [Blanchard e Brüning, 2015] P. Blanchard e E. Brüning, Mathematics methods in physics, Birkhäuser, 2015.
- [Cascais *et al.*, 1983] J. Cascais, R. Dilão e A. Noronha da Costa, Chaos and reverse bifurcations in a RCL circuit, Phys. Lett. **93A** (1983) 213-216.
- [Davies, 2000] J. L. Davies, Mathematics of wave propagation, Princeton University Press, 2000.
- [Eckman e Ruelle, 1985] J.-P. Eckman e D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, Rev. Mod. Phys. **57** (1985) 617-656.
- [Esposito, 2017] G. Esposito, From ordinary to partial differential equations, Springer, 2017.
- [Evans, 2010] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, 2010.
- [Falconer, 1985] K. J. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, 1985.
- [Feigenbaum, 1978] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, J. Stat. Phys. **19** (1978) 25-52.

- [Haberman, 1998] R. Haberman, Elementary partial differential equations, Prentice Hall, 1998.
- [Hassani, 1999] S. Hassani, Mathematical physics, Springer-Verlag, 1999.
- [Heisenberg, 1967] W. Heisenberg, Nonlinear problems in physics, Physics Today, **20** (1967) 27-33.
- [Higgins, 1977] J. R. Higgins, Completeness and basis properties of sets of special functions, Cambridge University Press, 1977.
- [Kolmogoroff e Fomin, 1977] A. Kolmogoroff e S. Fomin, Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir, 1977.
- [Körner, 1993] T. W. Körner, Fourier analysis, Cambridge Uni. Press, 1993.
- [Marsden, 1973] J. E. Marsden, Basic complex analysis, Freeman, 1973.
- [May, 1976] R. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature **261** (1976) 459-467.
- [Richtmyer, 1978] R. D. Richtmyer, Principles of advanced mathematical physics, Springer-Verlag, 1978.
- [Salsa, 2015] S. Salsa, Partial differential equations in action, Springer, 2008.
- [Schwartz, 1966] L. Schwartz, Mathematics for the physical sciences, Dover, 1966.
- [Scott *et al.*, 1973] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, D. W. McLaughlin, The Soliton: A new concept in applied science, Proc. IEEE **61** (1973) 1443-1483.
- [Shearer e Levy, 2015] M. Shearer e R. Levy, Partial differential equations. An introduction to theory and applications, Princeton University Press, 2015.
- [Stein e Shakarchi, 2003] E. M. Stein e R. Shakarchi, Fourier analysis: An introduction, Princeton University Press, 2003.
- [Stein e Shakarchi, 2005] E. M. Stein e R. Shakarchi, Real analysis, measure theory, Integration, and Hilbert Spaces, Princeton University Press, 2005.
- [Strichartz, 1994] R. Strichartz, A guide to distribution theory and fourier transforms, CRC Press, Boca Raton, 1994.

- [Strichartz, 2000] R. Strichartz, The way of analysis, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 2000.
- [Strzalko *et al.*, 2010] J. Strzalko, J. Grabski, A. Stefanski, P. Perlikowski e T. Kapitaniak, Understanding coin-tossing, The Mathematical Intelligencer, **32**(4) (2010) 54-58.
- [Szekeres, 2004] P. Szekeres, A course in modern mathematical physics. Groups, Hilbert space and differential geometry, Cambridge University Press, 2004.

Os conceitos básicos de análise podem ser revistos em [Strichartz, 2000]. Os livros de [Kolmogoroff e Fomin, 1977], [Stein e Shakarchi, 2005] e de [Higgins, 1977] são referências completas sobre os fundamentos da teoria da medida, do integral de Lebesgue, da construção dos espaços de Hilbert e da teoria dos operadores. A construção da medida exterior de Hausdorff é descrita em [Falconer, 1985]. Os livros de [Hassani, 1999], [Szekeres, 2004], [Appel, 2007] e de [Arfken e Weber, 2005] têm exposições com o mesmo conteúdo técnico mas são dirigidos para a Física. O livro de [Richtmyer, 1978] continua a ser o grande clássico da Física Matemática e [Blanchard e Brüning, 2015] é uma referência avançada.

Os fundamentos da teoria das distribuições foram introduzidos em 1951 por L. Schwartz. Duas boas referências são os livros de [Schwartz, 1966] e de [Strichartz, 1994].

Referências completas sobre séries de Fourier são [Körner, 1993] e [Stein e Shakarchi, 2003]. As técnicas das transformadas de Fourier e das funções de Green podem ser vistas em mais detalhe em [Haberman, 1998] e [Hassani, 1999].

A teoria da transformada de Fourier discreta está descrita em detalhe em [Hassani, 1999]. A teoria e as aplicações das transformadas de Laplace estão descritas em detalhe em [Marsden, 1973]. Os livros de [Marsden, 1973] e [Appel, 2007] são boas referências para a técnica dos resíduos.

Os livros de [Haberman, 1998] e de [Hassani, 1999] têm quase tudo sobre a equação das ondas, desde o elementar ao avançado. Uma referência moderna é [Davies, 2000]. [Strichartz, 1994] tem uma boa discussão sobre soluções fortes e fracas de equações às derivadas parciais. As equações às derivadas parciais têm uma vasta bibliografia. O tratado de equações às derivadas parciais é [Evans, 2010]. Bons compromissos são os livros de [Salsa, 2015], [Shearer e

Levy, 2015] e [Esposito, 2017]. O artigo [Scott *et al.*, 1973] é uma introdução aos solitões.

Uma boa introdução à teoria dos sistemas dinâmicos caóticos é o artigo de revisão de [Eckman e Ruelle, 1985].