Exercícios de Sistemas Dinâmicos

Distribuído no dia 27 de Setembro de 2019, para entregar no dia 6 de Outubro de 2019, até às 24h.
Entrega electrónica por e-mail

1.1) Seja a equações diferencial linear $\dot{x} = Ax$, em que $x \in \mathbf{R}^n$ e A é uma matriz de $n \times n$. Mostre que a solução desta equação diferencial é $x(t) = e^{tA}x(0)$, em que $e^{tA} = \sum_{i=0}^{\infty}(tA)^n/n!$.

1.2) Estude a estabilidade dos pontos fixos das equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y\,. \end{cases}$$

1.3) Sejam r e θ as coordenadas polares do plano. Determine qualitativamente as curvas de fase do sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\theta} = a \end{cases} \qquad (a > 0)$$

Note que o espaço de fases é o espaço euclidiano de coordenadas cartesianas (x, y). Depois de resolver o problema "à mão", use o Mathematica para determinar o campo de vectores e as soluções que achar interessantes.

1.4) Seja o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x^3\,. \end{cases}$$

Mostre que o sistema associado de equações lineares em torno de $(0, 0)$ tem um ponto fixo instável. Mostre que o sistema não-linear é estável em torno de $(0, 0)$. (Sugestão: $V(x, y) = x^4 + 2y^2$).

1.5) Seja o sistema de equações de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy. \end{cases}$$

Determine os pontos fixos da equação diferencial. Encontre condições no parâmetro r para que o ponto fixo na origem $(0, 0, 0)$ seja assimptoticamente estável. Considere o caso em que $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. (Sugestão: Utilize a função de Liapunov $V(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$ e escreva $\frac{dV}{dt}$ como uma forma quadrática.)

1.6) Seja a aplicação de um intervalo $x_{n+1} = f_\mu(x_n) = 4\mu x_n(1 - x_n)$, em que $x_n \in [0, 1]$ e $\mu \in [0, 1]$ é um parâmetro. Analise os limites de estabilidade de todos os pontos fixos de período 1, em função de μ.

1.7) Determine a solução geral do sistema dinâmico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + 3y_n. \end{cases}$$

1.8) Seja a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = |y| \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Faça o estudo qualitativo das órbitas de fase e esboçe qualitativamente o fluxo de fase.

1.9) Determine qualitativamente o tipo de soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \varepsilon y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

em que ε é um parâmetro real, positivo ou negativo.