

# Capítulo 1

## Equações diferenciais como sistemas dinâmicos

*The progress in physics certainly will depend to a large extent on the progress of nonlinear mathematics, of methods of solving nonlinear equations.*

*W. Heisenberg, Physics Today, 20 (1967) 27-33.*

Um sistema é um conjunto de fenómenos ou acontecimentos com uma dinâmica própria e que pode ser isolado do resto universo. Esta definição só faz sentido se pensarmos que ao isolarmos um sistema do resto do universo, não existem alterações observáveis nem no sistema nem no universo. Assim, cada sistema é um universo. Por exemplo, o universo é um sistema, a célula é um sistema, o átomo é um sistema.

O conceito de sistema é uma tentativa de estruturar o nosso conhecimento sobre a natureza. A ciência, tal como a fazemos hoje, baseia-se nesta racionalização.

Seja um sistema  $\mathcal{S}$  (físico, matemático, biológico, económico, *etc.*) caracterizado ou descrito por um número finito de variáveis de estado,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Nos instantes  $t_0$  e  $t_1$ , com  $t_0 < t_1$ , os estados do sistema  $\mathcal{S}$  são especificados pelos valores que tomam as variáveis de estado:

$$\mathbf{x}(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(t_1) = (x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)).$$

Se  $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{x}(t_1)$ , o estado do sistema evolui no tempo. Se existir um operador  $g_t$  tal que:

- a)  $g_t(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}(t)$ ,
- b)  $(g_t \circ g_s)(\mathbf{x}(0)) = (g_{t+s})(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}(t+s)$ ,
- c)  $g_0(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)$ ,

então  $\mathcal{S}$  e  $g_t$  definem um *sistema dinâmico determinista* de dimensão finita  $n$ .

O conjunto de todos os valores possíveis das variáveis de estado  $(x_1, \dots, x_n)$  é o *espaço de fases* ou espaço de estados do sistema  $\mathcal{S}$ . O operador  $g_t$  actua sobre o espaço de fases de coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ . É usual confundir o sistema real com o seu espaço de estados  $\mathcal{S}$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Para um sistema com  $n$  variáveis de estado, o espaço de fases pode ser  $\mathbb{R}^n (= \mathcal{S})$ , um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , ou uma variedade de dimensão  $n$  (Apêndice A). A escolha das variáveis de estado de um sistema é um processo *a priori* que determina o grau de generalidade com que o sistema é descrito.

Descrever um sistema dinâmico é definir o seu espaço de estados  $\mathcal{S}$ , encontrar o operador  $g_t$  que descreve a evolução temporal do sistema e determinar as suas propriedades.

Seja  $f(x, t)$  uma função contínua, definida num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$ . Seja o sistema de equações diferenciais (ordinárias)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (1.1)$$

em que  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x, t) = (f_1(x, t), \dots, f_n(x, t)) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ . As variáveis dependentes são as componentes do vector  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t$  é a variável independente. O conjunto  $\mathbb{R}^n$  é o *espaço de fases* do sistema (1.1) e  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  é o *espaço de fases alargado*.

Uma solução da equação diferencial (1.1) é uma aplicação  $\phi(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  que verifica

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi(t), t).$$

As soluções das equações diferenciais têm as notações alternativas:  $\phi(t)$ ,  $\phi(t; t_0)$ ,  $\phi(t; t_0, x_0)$ ,  $\phi(t; x_0)$  ou ainda  $\phi(t; t_0, x_0, \alpha)$ , em que  $\alpha$  é um parâmetro e  $x_0$  é o valor da solução no instante  $t_0$ . Estas notações diferentes realçam a dependência das soluções nas condições iniciais e nos parâmetros. Do ponto de vista formal,  $\phi(t; x_0) = g_t(x_0)$ .

Se a função  $f$  obedece a  $f(x+y, t) = f(x, t) + f(y, t)$ , para todo o  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ , e se  $\phi_1(t)$  e  $\phi_2(t)$  são ambas soluções da equação (1.1), com  $\phi_1(t) \neq \phi_2(t)$ , então  $\psi(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$  é também solução de (1.1). Neste caso, o

sistema de equações (1.1) é linear. Se  $\dot{x} = A(t)x$ , em que  $A(t)$  é uma matriz quadrada, o sistema de equações diferenciais é *linear*.

Se a função  $f$  não depende explicitamente do tempo,  $\dot{x} = f(x)$ , o sistema de equações diferenciais diz-se *autónomo*. Se uma equação diferencial não depende explicitamente do tempo, pode-se sempre fazer uma translação na origem dos tempos,  $\tau = t - t_0$ , e a equação fica inalterada. Assim, no espaço de fases alargado  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , qualquer recta paralela ao eixo real  $\mathbb{R}$  corta a família de curvas  $(\phi(t), t)$  segundo a mesma tangente.

Uma *curva de fase* da equação diferencial (1.1) é a imagem da solução  $\phi(t; t_0, x_0)$ , no espaço de fases. Pode acontecer que uma curva contínua no espaço de fases seja o gráfico de mais do que de uma solução da equação diferencial.

A *órbita* do ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é o conjunto:  $\mathcal{O}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi(t; t_0, x_0), t \in I\}$ , em que  $I$  é o intervalo de definição de  $t$ . Uma *curva integral* de uma equação diferencial é o conjunto

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times I : x = \phi(t), t \in I\}.$$

Uma curva integral é o gráfico no espaço de fases alargado de uma solução da equação diferencial.

Uma função  $\phi(t)$  é uma solução periódica da equação diferencial (1.1), se existir uma constante  $T > 0$  tal que

$$\phi(t) = \phi(t + T),$$

para todo o  $t \in I$ . Uma solução periódica de uma equação diferencial é também designada por *órbita periódica*.

Um sistema de equações diferenciais define um *campo de vectores*  $X$  no espaço de fases ou um *fluxo de fase* (figura 1.1): as componentes do campo de vectores  $X$  segundo as direcções  $x_1, \dots, x_n$  são as funções  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ , respectivamente. A imagem no espaço de fases da curva de fase  $\phi(t)$  tem como tangente, no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , o vector  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Assim, em princípio e pelo menos em dimensões 1, 2 e 3, é sempre possível determinar qualitativamente as curvas de fase, ou seja, é sempre possível determinar qualitativamente as soluções do sistema de equações diferenciais (1.1).

Analise-se o problema inverso. Seja o campo de vectores no plano gerado por uma carga eléctrica ou uma massa,  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r$ , em que  $c$  é uma constante e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Sejam as coordenadas polares do plano,

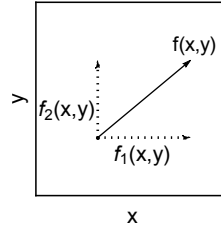


Figura 1.1: Campo de vectores do sistema de equações diferenciais  $\dot{x} = f(x)$  com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Em componentes, o sistema de equações diferenciais escreve-se na forma  $\dot{x} = f_1(x, y)$  e  $\dot{y} = f_2(x, y)$ .

$x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ , e seja  $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$  o versor radial (figura 1.2a)). As linhas de campo são as curvas tangentes ao campo de vectores  $\vec{E}$  (figura 1.2b)). Assumindo que as linhas de campo são parametrizadas por uma variável independente  $s$ , as equações que determinam as linhas de campo são

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = E_x = \frac{c}{r^2} \cos(\theta) = \frac{cx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{dy}{ds} = E_y = \frac{c}{r^2} \sin(\theta) = \frac{cy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (1.2)$$

Para determinar as linhas de campo de  $\vec{E}$ , em (1.2), divide-se a primeira equação pela segunda, eliminando a coordenada independente  $s$ , obtendo-se

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}. \quad (1.3)$$

A equação (1.3) é a equação das curvas de fase da equação diferencial (1.2). Resolvendo a equação diferencial de primeira ordem (1.3) pela técnica das quadraturas, obtém-se a solução  $y = (y_0/x_0)x$ . Isto é, a curva de fase do campo de vectores  $\vec{E}$  que passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$  é a recta que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(x_0, y_0)$  (figura 1.2). Pode acontecer que existam equações diferenciais em que se conhece explicitamente as curvas de fase, mas não se conhece uma parameterização exacta das soluções no tempo. Um exemplo desta dificuldade ocorre para a parameterização temporal do problema de Kepler (secção 31.2).

Mostrou-se assim que é sempre possível associar um campo de vectores a uma equação diferencial e, inversamente, uma equação diferencial da forma (1.1) define um campo de vectores no espaço de fases. As linhas de campo de

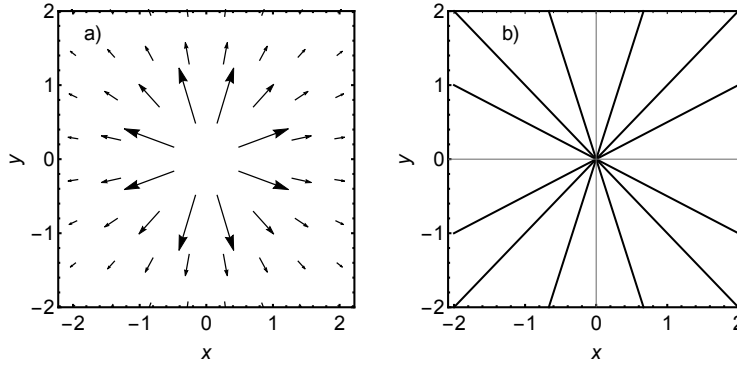


Figura 1.2: a) Campo de vetores do sistema de equações diferenciais (1.2) para  $c = 1$ . Em cada ponto  $(x, y)$  do espaço de fases, o campo de vetores que define o fluxo de fase tem componentes  $E_x = cx/(x^2 + y^2)^{3/2}$  e  $E_y = cy/(x^2 + y^2)^{3/2}$ . b) Curvas de fase do sistema de equações (1.2).

um campo de vetores ou as curvas de fase de uma equação diferencial são as mesmas entidades.

Seja  $\dot{x} = f(x)$  uma equação diferencial em  $\mathbb{R}^n$ . O ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  é um *ponto fixo* para o fluxo de fase se

$$f(p) = 0.$$

Neste caso,  $\dot{x} = 0$  e portanto não existe fluxo de fase, isto é,  $\phi(t; t_0, p) = p$ , para todo o  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, pontos fixos são soluções particulares de equações diferenciais.

Os pontos fixos de uma equação diferencial também se designam por *pontos de equilíbrio*, *pontos estacionários*, *pontos críticos* ou *pontos singulares* do campo de vetores.

**Exemplo 1.1.** Seja a equação diferencial não-linear

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(y) \\ \dot{y} = \sin(x) \end{cases} \quad (1.4)$$

Como se viu, a equação diferencial (1.4) define um campo de vetores ou fluxo de fase. É difícil determinar uma solução explícita no tempo da equação (1.4). No entanto, através da visualização da imagem do campo de vetores no espaço de fases, pode-se determinar o comportamento qualitativo das

soluções da equação (1.4). Como,  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (\sin y, \sin x)$  são as componentes do campo de vectores no espaço das fases da equação diferencial (1.4), resolvendo a equação  $f(x, y) = 0$ , resulta que a equação (1.4) tem a família de pontos fixos  $(x^*, y^*) = (n\pi, m\pi)$ , em que  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Na figura 1.3 está representado o campo de vectores da equação (1.4), assim como alguns dos seus pontos fixos. Este campo de vectores pode ser calculado em vários pontos do espaço de fases e, visualizando as curvas tangentes ao campo de vectores, pode-se inferir sobre a forma qualitativa das soluções da equação diferencial.

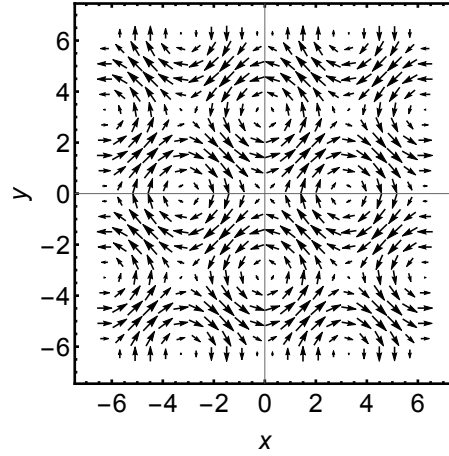


Figura 1.3: Campo de vectores do sistema de equações diferenciais (1.4): Em cada ponto  $(x, y)$  do espaço de fases, o campo de vectores que define o fluxo de fase tem componentes  $(\sin y, \sin x)$ . As imagens das soluções de uma equação diferencial são tangentes ao campo de vectores.

Na figura 1.3, é fácil identificar que, dependente das condições iniciais, existem vários tipos de soluções para a equação diferencial (1.4):

- a) Soluções constantes (pontos fixos).
- b) Soluções periódicas.
- c) Soluções monótonas crescentes e decrescentes.

No caso particular da equação (1.4), pode-se determinar a solução analítica das curvas integrais no espaço de fases. Dividindo a primeira equação em

(1.4) pela segunda e integrando directamente, as curvas integrais que passam pelo ponto  $(x_0, y_0)$  obedecem à equação

$$\cos(x) - \cos(y) = \cos(x_0) - \cos(y_0). \quad (1.5)$$

As soluções da equação (1.4) ficam determinadas implicitamente por (1.5). Neste exemplo, foi possível fazer a análise qualitativa das soluções da equação diferencial e determinar uma relação implícita a que devem obedecer as suas soluções. ■

Veja-se em que condições o sistema de equações diferenciais (1.1) tem soluções únicas na vizinhança de um ponto  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.2** (existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias, [Arnold, 1974]). *Seja a equação diferencial (1.1), em que  $f(x, t)$  é uma função Lipschitziana num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , isto é,  $|f(x, t) - f(y, t)| < k|x - y|$ , para todo o  $(x, y, t) \in U$ . Então, existem constantes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  e uma função  $\phi(t) : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , solução da equação diferencial (1.1), em que  $\phi(t_0) = x_0$ ,  $(x_0, t_0) \in U$  e  $I_1 = \{t \in \mathbb{R} : t_0 - \varepsilon_1 < t < t_0 + \varepsilon_1\}$ . Se existir outra solução  $\phi_2(t) : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\phi_2(t_0) = x_0$ , e  $I_2 = \{t \in \mathbb{R} : t_0 - \varepsilon_2 < t < t_0 + \varepsilon_2\}$ , então  $\phi(t) = \phi_2(t)$  no intervalo  $[t_0 - \varepsilon_3, t_0 + \varepsilon_3]$ , em que  $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ .*

A demonstração do teorema de existência e unicidade baseia-se na construção de uma sucessão convergente para a solução da equação integral associada à equação (1.1). Assumindo que  $f(x)$  é uma função contínua e que a solução  $x(t)$  da equação diferencial, se existir, é diferenciável, a solução da equação (1.1) obedece à equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau.$$

Como, no instante  $t_0$ , a condição inicial  $x_0$  é solução da equação (1.1), pode-se definir a sucessão de funções

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(\tau), \tau) d\tau \quad n \geq 0. \quad (1.6)$$

O teorema de existência e unicidade estabelece as condições em que a sucessão  $x_n(t)$  obtida através de (1.6) converge, quando  $n \rightarrow \infty$ , para a solução  $\phi(t, x_0)$ . A função  $x_n(t)$  é uma aproximação à solução  $\phi(t, x_0)$  na vizinhança de  $(x_0, t_0)$ . Por exemplo, em primeira ordem de aproximação, tem-se que

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_0, \tau) d\tau.$$

Se  $f$  não depende explicitamente do tempo, vem que

$$x_1(t) = x_0 + (t - t_0)f(x_0) := x_0 + \Delta t f(x_0),$$

o que equivale a substituir as derivadas na equação (1.1) por diferenças finitas. O processo iterativo definido por  $x_1(\Delta t) = x_0 + \Delta t f(x_0)$  é o método de Euler para a integração numérica da equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$ .

O teorema de existência e unicidade é apenas válido localmente no tempo. No caso em que o espaço de fases de uma equação diferencial é compacto e o campo de vectores é, pelo menos, de classe  $C^1$ , as soluções estão definidas para todo o  $t \in \mathbb{R}$ , [Chillingworth, 1976, p. 187]. A campos de vectores sobre esferas, toros ou círculos correspondem soluções globalmente definidas no tempo. Analogamente, se, no espaço de fases, existirem conjuntos fechados em que o campo de vectores sobre a fronteira aponta para o interior desses conjuntos, soluções com condições iniciais no seu interior estão definidas para todo o  $t \in \mathbb{R}$ .<sup>1</sup> Para sistemas de equações diferenciais lineares, as soluções existem e podem ser prolongadas para todo o  $t \in \mathbb{R}$  (Apêndice B).

**Exemplo 1.3.** Seja a equação diferencial

$$\dot{x} = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

O campo de vectores definido por esta equação diferencial é contínuo em  $\mathbb{R}$  e a sua solução é

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{(t-t_0+2\sqrt{x_0})^2}{4}, & \text{se } x_0 \geq 0 \\ x_0, & \text{se } x_0 < 0. \end{cases}$$

Para  $t = t_1 = t_0 - 2\sqrt{x_0}$ ,  $\phi(t_1) = 0$  e todas as soluções atingem a solução  $x = 0$  ao fim do tempo  $t_1$ . Assim, a solução  $\phi(t) = 0$  não é única. Neste exemplo, mostra-se que a continuidade do campo de vectores não é uma condição suficiente para garantir a unicidade das soluções de uma equação diferencial. Em  $x = 0$ , o campo de vectores é contínuo mas não é localmente Lipschitziano (numa vizinhança de zero, não se pode ter  $\sqrt{|x|} \leq k|x|$ ). ■

<sup>1</sup>Esta condição é dependente da dimensão do espaço de fases. Em geral este resultado pode ser formulado da seguinte maneira: Se, no espaço de fases, existir um conjunto limitado  $D$ , positivamente invariante para o fluxo  $\phi_t$ , isto é,  $\phi_t(D) \subseteq D$ , então as soluções com condições iniciais no fecho de  $D$  estão globalmente definidas no tempo.



**Exemplo 1.4.** Seja a equação diferencial  $\dot{x} = x^2$ . Por integração directa desta equação, decorre que a solução que passa por  $x_0$  no instante  $t = 0$  é

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 - t}.$$

Esta solução está definida no intervalo  $t \in (-\infty, 1/x_0)$ , embora o campo de vectores seja analítico e esteja definido em todo o espaço de fases  $\mathbb{R}$ . Veja-se que o campo de vectores é localmente Lipschitziano, mas não é globalmente Lipschitziano. Seja  $x = x_0$  e  $y = x_0 + \varepsilon$ . Assim,

$$\frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = \frac{|2x_0\varepsilon + \varepsilon^2|}{|\varepsilon|} \leq 2|x_0| + |\varepsilon|.$$

Se  $x_0$  está contido num conjunto limitado de  $\mathbb{R}$ ,  $2|x_0| + |\varepsilon|$  é necessariamente majorado por uma constante  $k_1$  e o campo de vectores é localmente Lipschitziano. No entanto, quando  $x_0$  percorre  $\mathbb{R}$ ,  $2|x_0| + |\varepsilon|$  é tão grande quanto se queira e o campo de vectores não é globalmente Lipschitziano. Neste caso, o teorema de existência e unicidade garante apenas a existência de soluções locais no tempo. ■

Do teorema de existência e unicidade das soluções de uma equação diferencial autónoma decorre que as suas soluções definem um *grupo (local) a um parâmetro* — o tempo  $t$  — de difeomorfismos. Isto é:<sup>2</sup>

- a)  $\phi(t, x_0)$  é de classe  $C^r$  com  $r \geq 1$ ;
- b)  $\phi(0, x_0) = x_0$ ;
- c)  $\phi(t + s, x_0) = \phi(t, \phi(s, x_0))$ ,  $\forall t, s \in I$ , em que  $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

**Exemplo 1.5.** Seja o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{cases} \quad (1.7)$$

<sup>2</sup> Seja  $X$  um conjunto e  $f : X \rightarrow X$  uma bijecção de  $X$ , isto é, existe uma função  $f^{-1}$  tal que  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1$ . A função  $f$  é uma transformação de variáveis sobre  $X$ . O conjunto  $G$  de todas as transformações de variáveis de  $X$ , juntamente com a operação de composição de funções —  $(G, \circ)$  — é um *grupo de transformações* de  $X$  se os elementos de  $G$  verificam: a)  $G$  contém a transformação identidade; b) Para cada  $f \in G$ ,  $f^{-1}$  é um elemento de  $G$ . c) Se  $f_1, f_2 \in G$ , então  $f_1 \circ f_2 \in G$  e a operação “ $\circ$ ” é associativa.

cuja solução geral é

$$\phi(t, x_0, y_0) = \begin{cases} x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y(t) &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{cases}$$

A equação que determina as curvas de fase é  $\frac{dx}{dy} = -y/x$ , cuja solução geral é,  $x(t)^2 + y(t)^2 = x_0^2 + y_0^2$ . Na figura 1.4, estão representados o campo de vectores e as curvas de fase da equação diferencial (1.7). Como se mostra facilmente,  $\phi(t, x_0, y_0)$  define um grupo a um parâmetro de difeomorfismos,

$$\begin{aligned} \phi(t+s, \vec{x}_0) &= (x_0 \cos(t+s) + y_0 \sin(t+s), -x_0 \sin(t+s) + y_0 \cos(t+s)) \\ &= (x_0 \cos t \cdot \cos s - x_0 \sin t \cdot \sin s + y_0 \sin t \cdot \cos s + y_0 \cos t \cdot \sin s, \\ &\quad \dots) \\ &= \phi(t, (x_0 \cos s + y_0 \sin s, -x_0 \sin s + y_0 \cos s)) = \phi(t, \phi(s, \vec{x}_0)). \end{aligned}$$

O operador  $g_t$ , definido através da relação  $\phi(t, x_0, y_0) = g_t((x_0, y_0))$ , é

$$g_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo, o conjunto  $\{g_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  é um grupo de transformações do plano (grupo das rotações do plano designado por  $SO(2)$ ).

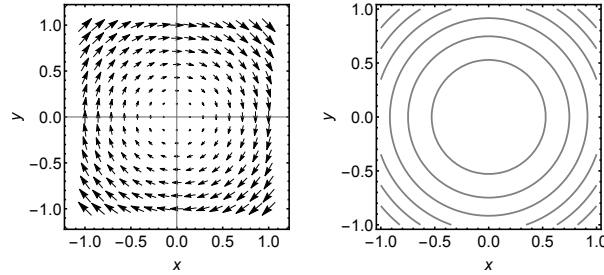


Figura 1.4: Campo de vectores e curvas de fase do sistema de equações diferenciais (1.7). Em cada ponto  $(x, y)$  do espaço de fases, o campo de vectores tem componentes locais  $(y, -x)$ .

■

**Exemplo 1.6.** Equação diferencial numa variedade (círculo). Seja a equação diferencial  $\dot{\theta} = \omega$  ( $\omega = \text{constante}$ ) com  $\theta \in (0, 2\pi)$ , em que  $(0, 2\pi)$  é uma carta do

círculo  $S^1$  (Apêndice A). A solução desta equação diferencial é  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$  (mod.  $2\pi$ ). Na figura 1.5, está representada a solução  $\theta(t)$ , na coordenada da carta do círculo.

Vejam-se que a equação diferencial  $\dot{\theta} = \omega$  define um fluxo de fases num círculo de raio constante  $r$ . Seja  $x = r \cos(\theta)$  e  $y = r \sin(\theta)$ . Derivando  $x$  e  $y$  em ordem a  $t$ , obtém-se

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\omega y \\ \dot{y} &= \omega x, \end{cases}$$

ou seja,  $\ddot{x} = -\omega \dot{y} = -\omega^2 x$ , que é a equação de um oscilador harmónico cujo fluxo de fases roda no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Muitas vezes, as equações diferenciais em variedades compactas resultam de uma redução de dimensão do espaço de fases, associada à existência de funções e invariantes para a dinâmica. Nestes casos, a análise quantitativa e qualitativa das órbitas de fase fica simplificada.

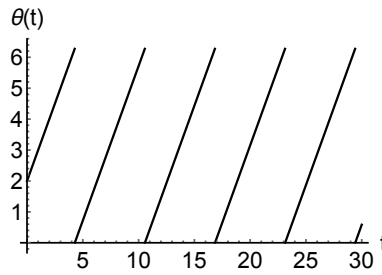


Figura 1.5: Gráfico da solução da equação diferencial  $\dot{\theta} = \omega$  (mod.  $2\pi$ ), na coordenada da carta do círculo  $S^1$ .

■

Numa equação diferencial, a existência de órbitas periódicas e de pontos fixos condiciona a topologia das curvas de fase. Através do conhecimento do campo de vectores e dos seus pontos fixos, é possível determinar, pelo menos qualitativamente, os vários tipos topológicos das curvas de fase.

A razão pela qual as soluções da equação diferencial (1.1) podem ser construídas qualitativamente no espaço de fases através de considerações sobre a continuidade do campo de vectores é justificada pelo teorema da diferenciabilidade em relação às condições iniciais e a parâmetros.

**Teorema 1.7** (diferenciabilidade em relação às condições iniciais e a parâmetros, [Arnold, 1974]). *Seja a família de equações diferenciais autónomas*

$\dot{x} = f(x, \alpha)$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  é um conjunto de parâmetros definidos num aberto  $A$  de  $\mathbb{R}^m$ . Se o campo de vectores  $f(x, \alpha)$  é diferenciável de classe  $C^r$  em relação aos parâmetros  $\alpha$  e a  $x$ , e se  $f(x_0, \alpha_0) \neq 0$ , então, para valores suficientemente pequenos de  $t$ , de  $\|x - x_0\|$  e de  $\|\alpha - \alpha_0\|$ , a solução  $\phi(t)$  que verifica a condição inicial  $\phi(0) = x_0$  é diferenciável de classe  $C^r$  em relação a  $t$ ,  $x$  e  $\alpha$ .

Uma das consequências do teorema da diferenciabilidade em relação às condições iniciais e a parâmetros é a possibilidade de se poderem determinar soluções locais aproximadas de sistemas não integráveis. Por outro lado, este teorema justifica a teoria (local) das perturbações, [[Arnold, 1974](#)].

**Exercício 1.1.** Seja a equações diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , em que  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A$  é uma matriz de  $n \times n$ . Mostre que a solução desta equação diferencial é  $x(t) = e^{tA}x(0)$ , em que  $e^{tA} := \sum_{i=0}^{\infty} (tA)^i / i!$ . Use a iteração definida em (1.6).

**Exercício 1.2.** Seja a equação diferencial linear  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , em que  $A$  é uma matriz de  $n \times n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

a) Se  $A^2 = -I$ , em que  $I$  é a matriz identidade, mostre que

$$e^{At} = \cos(t)I + \sin(t)A.$$

b) Com este resultado, obtenha explicitamente a solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases}$$

para as condições iniciais  $x_0 = y_0 = 1$ , em  $t = 0$ .

## Capítulo 2

# Estabilidade de pontos fixos

Numa equação diferencial não-linear, as únicas soluções facilmente determináveis são as que correspondem aos pontos fixos do campo de vectores. Analise-se então o comportamento das soluções de uma equação diferencial na vizinhança dos pontos fixos do campo de vectores.

**Definição 2.1** (estabilidade à Lyapunov). Um ponto fixo  $x_0$  de uma equação diferencial é estável à Lyapunov se:

- 1) Existe uma vizinhança  $\mathcal{U}(x_0)$  de  $x_0$  tal que  $\phi(t, x)$ , com  $x \in \mathcal{U}(x_0)$ , está definido para todo o  $t \geq 0$ .
- 2) Para toda a vizinhança  $\mathcal{V}(x_0) \subset \mathcal{U}(x_0)$  suficientemente pequena, existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_1(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$  tal que toda a solução  $\phi(t, x)$ , com  $x \in \mathcal{V}_1(x_0)$ , está contida em  $\mathcal{V}(x_0)$ , para todo o  $t \geq 0$  (figura 2.1a)).

Se, para além das condições 1) e 2) anteriores,  $\phi(t, x) \rightarrow x_0$ , quando  $t \rightarrow \infty$  e  $x \in \mathcal{V}_1(x_0)$ , então  $x_0$  é *assintoticamente estável* (figura 2.1b)).

Se um ponto fixo não é estável à Lyapunov então é *instável*.

Na definição de estabilidade à Lyapunov, a condição  $\phi(t, x) \rightarrow x_0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , não é suficiente para garantir a estabilidade assintótica do ponto fixo  $x_0$ . De facto, pode-se ter o comportamento assintótico  $\phi(t, x) \rightarrow x_0$  mas, para valores finitos de  $t$ ,  $\phi(t, x)$  pode ser tão grande quanto se queira, [Birkhoff et al., 1978].

Por razões de simplificação de linguagem, a estabilidade à Lyapunov de um ponto fixo é simplesmente designada por estabilidade de um ponto fixo.

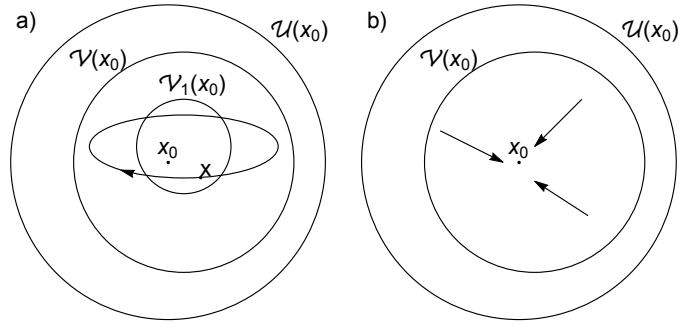


Figura 2.1: a) Ponto fixo estável à Lyapunov. b) Ponto fixo assintoticamente estável.

Em geral, nos sistemas de equações diferenciais não-lineares, a determinação da estabilidade de um ponto fixo pode ser um problema difícil. Nos casos lineares, a estabilidade pode ser analisada directamente através da análise explícita das soluções. Noutros casos, é possível aplicar um critério simples de estabilidade que se resume no teorema de Lyapunov.

Seja  $\dot{x} = f(x)$  uma equação diferencial autónoma, definida num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha-se que  $x_0$  é um ponto fixo da equação diferencial, isto é,  $f(x_0) = 0$ . Seja  $V(x)$  uma função definida numa vizinhança  $\mathcal{V}(x_0)$  de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e com valores em  $\mathbb{R}$ ,  $V(x) : \mathcal{V}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . A derivada de  $V$  ao longo do campo de vectores  $X$  é

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} V(\phi(t, x))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \text{grad} V \cdot f = |\text{grad} V| |f| \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $\theta$  é o ângulo que o campo de vectores faz com o vector gradiente, em cada ponto do espaço de fases (figura 2.2).

**Teorema 2.2** (Lyapunov). *Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto fixo isolado da equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$ . Seja  $V(x) : \mathcal{V}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e diferenciável em  $\mathcal{V}(x_0) - \{x_0\}$  e suponha-se ainda que  $V(x_0) = 0$  e  $V(x) > 0$  para  $x \neq x_0$ . Se  $V(x)$  verifica a condição  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ , em  $\mathcal{V}(x_0) - \{x_0\}$ , então o ponto fixo  $x_0$  é estável à Lyapunov. Se  $\frac{dV}{dt} < 0$ , em  $\mathcal{V}(x_0) - \{x_0\}$ , então o ponto fixo  $x_0$  é assintoticamente estável.*

Nas condições do teorema anterior,  $V(x)$  designa-se por função de Lyapunov.

A função de Lyapunov  $V(x)$ , se existir, tem um significado geométrico simples: Se  $x_0$  é um ponto fixo estável, a função de Lyapunov tem um mínimo local em  $x_0$  e, ao longo das projecções das curvas de nível da função  $z = V(x)$  no espaço de fases, o campo de vectores é reentrante (figura 2.2).

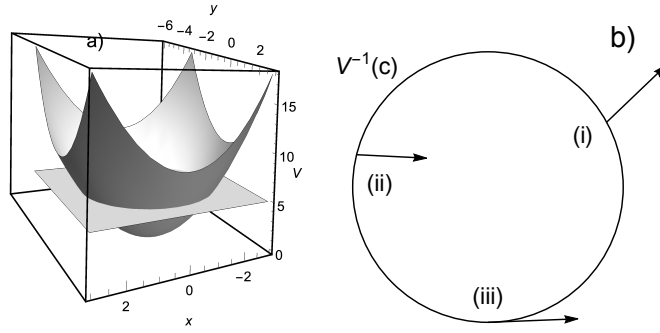


Figura 2.2: Em a), está representado o gráfico de uma função de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , na vizinhança de um ponto fixo estável em  $(x, y) = (0, 0)$ . Está também representado um plano que intersecta a função de Lyapunov a uma cota constante,  $V(x, y) = c$ . Em b), está representada a curva de nível de uma função de Lyapunov, projectada no plano de fases  $(x, y)$ . A projecção da curva de nível no plano de fases é o gráfico da função  $V^{-1}(c)$ . Sobre a curva de nível  $V^{-1}(c)$  estão marcados três vectores de fase. Por (2.1), tem-se que: i)  $\frac{dV}{dt} > 0$ ; ii)  $\frac{dV}{dt} < 0$ ; iii)  $\frac{dV}{dt} = 0$ . O sinal é determinado pelo ângulo que o campo de vectores faz com o vector gradiente que é sempre normal à curva de nível.

*Demonstração do Teorema de Lyapunov.* Seja  $\mathcal{B}_\delta(x_0)$  ( $= \mathcal{V}(x_0)$ ) uma bola fechada de centro  $x_0$  e raio  $\delta$ , com  $\delta > 0$  e  $\mathcal{B}_\delta(x_0) \subset \mathcal{U}(x_0)$  (figura 2.1). Suponha-se que a solução  $\phi_t(x)$  é prolongável para todo o  $t \geq 0$  e que  $x \in \mathcal{V}_1(x_0)$ . Seja  $\alpha$  o menor valor que  $V(x)$  toma sobre a fronteira de  $\mathcal{B}_\delta(x_0)$ ,  $\alpha = \min\{V(x) : x \in \partial\mathcal{B}_\delta(x_0)\}$ . Por hipótese  $V(x) > 0$ .

Seja  $\mathcal{V}_1 = \{x \in \mathcal{B}_\delta(x_0) : V(x) < \alpha\}$ . Então, por continuidade de  $V(x)$  e como  $V(x_0) = 0$ ,  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{B}_\delta(x_0)$ . Como  $x \in \mathcal{V}_1$  e, por hipótese,  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ , para  $x \in \mathcal{V}_1 - \{x_0\}$ ,

$$V(\phi_t(x)) - V(\phi_0(x)) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) dt \leq 0.$$

Assim,  $V(\phi_t(x)) \leq V(\phi_0(x)) < \alpha$  e  $\phi_t(x)$  não sai de  $\mathcal{B}_\delta(x_0)$ . Então,  $x_0$  é estável à Lyapunov.

Suponha-se que na vizinhança  $\mathcal{V}_1 - \{x_0\}$  de  $x_0$ ,  $\frac{dV}{dt} < 0$ . Nestas condições,  $V(\phi_t(x)) < V(\phi_{t_0}(x))$ . Como  $\delta$  pode ser tomado tão pequeno quanto se queira,  $V(\phi_t(x)) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Mas se  $V(\phi_t(x)) \rightarrow 0$ , então  $\phi_t(x) \rightarrow x_0$ .  $\square$

**Exemplo 2.3** (Sistema gradiente). Seja o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = -\nabla U(x),$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $U(x)$  é uma função contínua e diferenciável. Suponha-se ainda que  $U(x)$  tem um mínimo local não degenerado para  $x = x^*$ ,  $\nabla U(x^*) = 0$ . Seja a função de Lyapunov  $V(x) = U(x) - U(x^*)$ . Então, numa vizinhança de  $x^*$ ,  $V(x) > 0$ , para  $x \neq x^*$ . Como

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \dot{x}_i = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 < 0,$$

conclui-se que os pontos fixos isolados dos sistemas gradientes são assintoticamente estáveis.  $\blacksquare$

Em sistemas dinâmicos com vários pontos fixos assintoticamente estáveis, existem diferentes regiões no espaço de fases cujas órbitas dos seus pontos convergem assintoticamente no tempo para os diferentes pontos fixos. Uma região no espaço de fases cujos pontos têm órbitas que convergem para um ponto fixo designa-se por *bacia de atracção* desse ponto fixo.

Para além do critério de estabilidade de Lyapunov, pode-se analisar a estabilidade de um ponto fixo de uma equação diferencial através da linearização do campo de vectores em torno do ponto fixo. Veja-se então como proceder em dimensão 2. Seja o sistema de equações (1.1) e suponha-se que o ponto de coordenadas  $(x_0, y_0)$  é um ponto fixo para o fluxo de fases. Assim, na vizinhança de  $(x_0, y_0)$ , a solução da equação pode-se escrever na forma

$$\begin{cases} x(t) &= x_0 + \Delta x_0(t) \\ y(t) &= y_0 + \Delta y_0(t), \end{cases}$$

em que  $\Delta x_0(t)$  e  $\Delta y_0(t)$  são funções a determinar. Introduzindo esta solução no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x, y) \\ \dot{y} &= f_2(x, y), \end{cases}$$



obtém-se

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \frac{d\Delta x_0(t)}{dt} \\ \frac{d\Delta y_0(t)}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(x_0 + \Delta x_0(t), y_0 + \Delta y_0(t)) \\ f_2(x_0 + \Delta x_0(t), y_0 + \Delta y_0(t)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0(t) \\ \Delta y_0(t) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2) \\
 &= A \begin{pmatrix} \Delta x_0(t) \\ \Delta y_0(t) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2).
 \end{aligned}$$

A matriz  $A$  é a matriz da aproximação linear, ou jacobiano, do sistema de equações na vizinhança do ponto fixo  $(x_0, y_0)$ . Como as soluções do sistema linear dependem apenas dos valores próprios de  $A$ , isto é, as soluções são combinações lineares das funções  $e^{\lambda_1 t}$  e  $e^{\lambda_2 t}$ , em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os valores próprios de  $A$  (Apêndice B), a estabilidade local do ponto fixo  $(x_0, y_0)$  é determinada pelos valores próprios de  $A$ . Assim, o ponto fixo  $(x_0, y_0)$  do sistema linear é estável à Lyapunov se a parte real de ambos os valores próprios é negativa. O ponto fixo  $(x_0, y_0)$  é instável à Lyapunov se a parte real de algum dos valores próprios é positiva. Se as partes reais de ambos os valores próprios são nulas e as partes imaginárias são diferentes de zero, então o ponto fixo do sistema linear é ainda estável.

Em equações diferenciais em dimensão 1,  $\dot{x} = f(x)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ , a situação é mais simples. Neste caso, a equação para o desvio relativamente ao ponto fixo é

$$\frac{d\Delta x_0(t)}{dt} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \Delta x_0(t) := \lambda \Delta x_0(t).$$

Assim, o ponto fixo  $x_0$  da equação diferencial  $\dot{x} = f(x)$  é assintoticamente estável se  $\lambda < 0$ . O ponto fixo  $x_0$  é estável à Lyapunov se  $\lambda = 0$  e é instável se  $\lambda > 0$ .

Esta análise é apenas válida na vizinhança de um ponto fixo. Para uma equação (não linear) com vários pontos fixos, é necessário fazer a análise linear da estabilidade em torno de cada ponto fixo. No capítulo 4, ver-se-ão as condições em que esta análise pode ser tornada rigorosa, isto é, quais as condições em que a estabilidade do ponto fixo do sistema linear e do sistema não-linear são as mesmas.

Em resumo, para determinar a estrutura qualitativa das soluções de uma equação diferencial é necessário:

- 1) Determinar os pontos fixos.
- 2) Determinar a matriz da aproximação linear para cada ponto fixo e analisar a sua estabilidade.
- 3) Construir a imagem do campo de vectores no espaço de fases, assim como as curvas de fase tangentes ao campo de vectores.

**Exercício 2.1.** Estude a estabilidade dos pontos fixos das equações diferenciais lineares

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

**Exercício 2.2.** Sejam  $r$  e  $\theta$  as coordenadas polares do plano  $(x, y)$ . Determine qualitativamente as curvas de fase do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\theta} = a, \end{cases}$$

em que  $a > 0$  é um parâmetro. Desenhe qualitativamente as órbitas de fase no plano  $(x, y)$ . Depois de resolver o problema “à mão”, use o programa Mathematica para determinar numericamente o campo de vectores e as soluções que achar interessantes.

**Exercício 2.3.** Seja o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$$

Mostre que o sistema de equações, linearizado em torno de  $(0, 0)$ , tem um ponto fixo instável. Mostre que o sistema não-linear é estável em torno de  $(0, 0)$ . (Sugestão: Utilize a função de Lyapunov  $V(x, y) = x^4 + 2y^2$ .)

**Exercício 2.4.** Faça o estudo qualitativo do campo de vectores definido pela equação diferencial

$$\ddot{r} = \frac{A}{r^3} - \frac{B}{r},$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes positivas. Determine o comportamento do campo de vectores no espaço de fases de coordenadas  $(r, \dot{r})$ , em que  $r \geq 0$  e  $\dot{r} \in \mathbb{R}$ . Discuta os tipos de soluções topologicamente diferentes.

**Exercício 2.5.** Seja o sistema de equações de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{cases}$$

Determine os pontos fixos da equação diferencial. Encontre condições no parâmetro  $r$  para que o ponto fixo na origem  $(0,0,0)$  seja assintoticamente estável. Considere apenas o caso em que  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$ . (Sugestão: Utilize a função de Lyapunov  $V(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$  e escreva  $\frac{dV}{dt}$  como uma forma quadrática.)



## Capítulo 3

# Equações às diferenças como sistemas dinâmicos

As equações às diferenças surgem em problemas de modelação em tempo discreto ou como resultado da discretização de equações diferenciais ordinárias ou às derivadas parciais. O exemplo mais simples de uma equação às diferenças é quando uma variável contínua, por exemplo  $x$ , evolui no tempo em saltos temporais discretos. Por exemplo, seja  $x_n$  o número de indivíduos da população de um país no ano  $n$ . Suponha-se que a lei de evolução temporal do número de indivíduos no ano seguinte se pode escrever na forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (3.1)$$

em que a função  $f(x)$  é determinada de acordo com as taxas de mortalidade e de nascimento da população. Dois exemplos de leis populacionais são as funções  $f(x) = 4\mu x(k - x)$ , em que  $\mu$  e  $k$  são parâmetros (modelo logístico) e  $f(x) = rxe^{-x}$ , em que  $r$  é um parâmetro (modelo de Ricker).<sup>1</sup> Nestes casos, o espaço de fases é o domínio de variação da variável  $x$ , isto é,  $x \in \mathbb{R}_{0,+}$ .

Seja um sistema de  $N$  átomos de massa  $m$  numa rede cristalina unidimensional com interacções harmónicas entre átomos vizinhos. Designando por  $x_i$  o deslocamento do átomo número  $i$  em relação à sua posição de equilíbrio, a

---

<sup>1</sup>Na dinâmica de populações moderna, tanto o modelo logístico como o modelo de Ricker são encarados como “toy models”. Para previsões de crescimentos populacionais a longo termo, usam-se modelos mais elaborados como sejam o modelo de Leslie (modelo discreto) ou o modelo de McKendrick (modelo descrito por uma equação às derivadas parciais de primeira ordem), [Dilão, 2006].

lei de evolução temporal para os deslocamentos é

$$m\ddot{x}_i = k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Neste caso, tem-se um sistema de equações diferenciais e o espaço de fases tem dimensão  $2N$ . Fazendo o limite contínuo da equação (3.2), no espaçamento interatômico  $h$ , obtém-se a equação das ondas

$$m \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} = kh^2 \frac{\partial^2 d}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

em que  $d$  é o deslocamento de cada átomo relativamente à sua posição de equilíbrio. Para a equação das ondas (3.3), o espaço de fases tem dimensão infinita. Por outro lado, discretizando a equação (3.2) no tempo, obtém-se o sistema de equações às diferenças

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^n + \Delta t y_i^n \\ y_i^{n+1} &= y_i^n + \Delta t \frac{k}{m} (x_{i+1}^n + x_{i-1}^n - 2x_i^n), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tanto as equações (3.2) como (3.4) têm um espaço de fases de dimensão  $2N$ . No entanto existe uma diferença importante do ponto de vista dos sistemas dinâmicos. No caso das equações (3.2), as soluções definem um grupo contínuo de transformações do espaço de fases. No caso (3.4), o parâmetro temporal é discreto e as soluções são um grupo de transformações a um parâmetro discreto. Assim, a noção de campo de vectores deixa de ser válida e os conceitos de ponto fixo e de estabilidade têm de ser adaptados. Por abuso de linguagem, continua-se a falar de fluxo de fase.

Análise-se uma equação às diferenças lineares em dimensão 1. Seja a equação às diferenças

$$x_{n+1} = ax_n, \quad (3.5)$$

em que  $a$  é uma constante real ou complexa. A solução geral da equação às diferenças confunde-se com a própria equação, pois para uma dada condição inicial podemos determinar inequivocamente a evolução temporal.<sup>2</sup> Por indução, tem-se que a solução geral da equação às diferenças (3.5) é

$$x_n = a^n x_0,$$

---

<sup>2</sup>Este facto, atribui às equações às diferenças um papel muito importante na teoria da computação e na lógica. Em contextos mais técnicos, estas equações são um caso particular da classe das funções recursivas.

em que  $x_0$  é a condição inicial. Se  $a > 1$ , a solução diverge para infinito. Se  $a < 1$  a solução converge para zero. Se  $a = 1$ , vem que  $x_n = x_0$ , e  $x_0$  é um ponto fixo da equação às diferenças. No Apêndice C, resumem-se as técnicas para a determinação de soluções de equações às diferenças.

**Definição 3.1.** Seja o sistema dinâmico  $x_{n+1} = f(x_n)$ , em que  $f : I \rightarrow I$  é uma função contínua e  $I$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$  a iterada de ordem  $k$  do ponto  $x \in I$ . Um ponto  $x^* \in I$  do espaço de fases da equação às diferenças  $x_{n+1} = f(x_n)$  é um ponto fixo de período  $k$  se

$$f^k(x^*) = x^*, \quad (3.6)$$

em que  $k$  é o menor inteiro para o qual  $f^k(x^*) = x^*$ .

No caso particular em que  $f$  é sobrejectiva num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $f$  tem pelo menos um ponto fixo (teorema do ponto fixo de Browder).

Chama-se órbita de um ponto  $x \in I$  ao conjunto  $\mathcal{O} = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ . Se  $\mathcal{O}(x)$  é finito, então  $x$  é um ponto fixo periódico ou é a pré-imagem de um ponto periódico.

**Exemplo 3.2.** Seja o sistema dinâmico  $x_{n+1} = f(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$ , em que  $x_n \in [0, 1]$ . Na figura 3.1 estão representados os gráficos das funções  $f(x_n)$  e  $f^2(x_n)$ . A função  $f(x_n)$  tem 2 pontos fixos de período 1 e a função  $f^2(x_n)$  tem 4 pontos fixos, dois de período 1, que coincidem com os pontos fixos de  $f(x_n)$ , e dois pontos fixos de período 2. Como se intui facilmente,  $f^k(x_n)$  tem  $2^k$  pontos fixos, alguns comuns a  $f^{k-1}(x_n), \dots, f(x_n)$ .

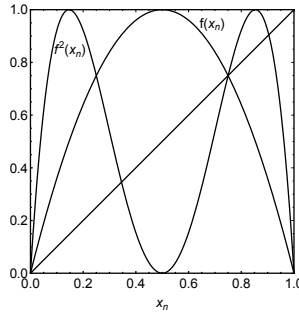


Figura 3.1: Gráficos das funções do intervalo  $f(x_n)$  e  $f^2(x_n)$ , em que  $f(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$ . Os pontos fixos de  $f$  e  $f^2$  estão sobre a diagonal  $y = x_n$ .

■

Quando se estuda a evolução de um ponto  $x \in I$  por iteração de  $f$ , o comportamento assintótico de  $x_n = f^n(x_0)$  depende da existência de pontos fixos e da sua estabilidade.

**Definição 3.3.** Um ponto fixo  $y \in I$  de período  $k$  do sistema dinâmico  $x_{n+1} = f(x_n)$  é *assintoticamente estável*, se existir uma vizinhança  $\mathcal{V}(y) \subset I$  tal que, para todo  $x \in \mathcal{V}(y)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = y$ .

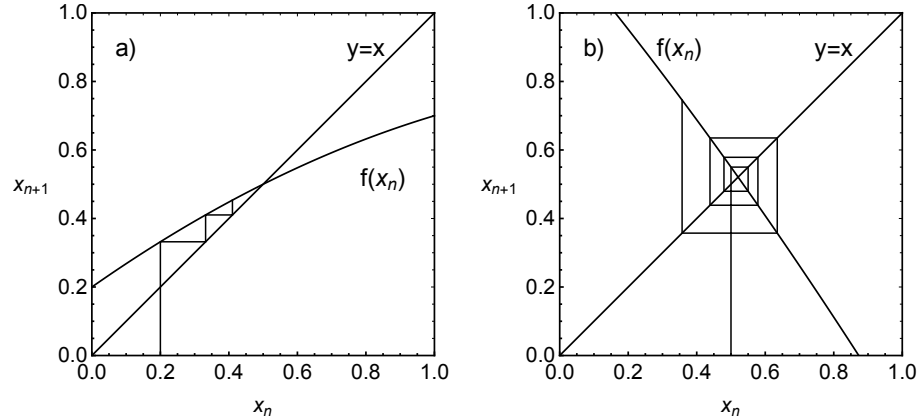


Figura 3.2: Comportamento das órbitas da dinâmica do intervalo  $x_{n+1} = f(x_n)$ , na vizinhança de um ponto fixo estável (a) ou instável (b), de período 1. a) A iterada do ponto  $x_0 = 0.2$  converge para o ponto fixo. b) A iterada do ponto  $x_0 = 0.5$  afasta-se do ponto fixo. O ponto fixo de período 1 da dinâmica está na intersecção do gráfico da função  $x_{n+1} = f(x_n)$  com o gráfico da função  $x_{n+1} = x_n$ .

Se  $f : I \rightarrow I$  é diferenciável na vizinhança do ponto fixo  $y \in I$  e se  $|f'(y)| < 1$ , então ponto fixo  $y$  de período  $k$  é assintoticamente estável. Se  $|f'(y)| > 1$  o ponto fixo é *instável*. Se  $|f'(y)| = 0$  o ponto fixo diz-se *superestável*. Se  $|f'(y)| = 1$  a estabilidade é indeterminada. Pode-se analisar facilmente a estabilidade de um ponto fixo através de um diagrama. Na figura 3.2 estão representadas as órbitas de pontos na vizinhança de pontos fixos estáveis e instáveis de uma função do intervalo. Como se conclui, o comportamento assintótico das iteradas depende da existência de pontos fixos e da sua estabilidade.

O conceito de estabilidade à Lyapunov continua válido para equações às diferenças.



**Definição 3.4.** Um ponto fixo  $y$  de período  $k$  de uma equação às diferenças é estável à Lyapunov se, para toda a vizinhança suficientemente pequena de  $y$ ,  $\mathcal{V}(y)$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{V}_1(y) \subset \mathcal{V}(x_0)$  tal que,  $f^{nk}(x) \in \mathcal{V}(y)$ , para todo  $n \geq 0$ , desde que  $x \in \mathcal{V}_1(y)$ .

No caso em que as equações às diferenças são lineares, a estabilidade define-se à custa dos valores próprios da matriz da aproximação linear. Assim, se  $x^*(=0)$  é um ponto fixo de período 1 da equação às diferenças linear

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (3.7)$$

em que  $A$  é uma matriz não degenerada, o ponto fixo  $x^*$  é estável à Lyapunov se os valores próprios de  $A$  estão no interior ou sobre a fronteira do círculo de raio unitário do plano complexo. Isto decorre do facto das soluções da equação às diferenças (3.7) se poderem escrever como combinações lineares de termos da forma  $\lambda_i^n$ , em que os  $\lambda_i$  são os valores próprios de  $A$  (Apêndice C).

Nos capítulos seguintes, encontrar-se-ão sistemas dinâmicos definidos naturalmente por equações às diferenças.

**Exercício 3.1.** Seja a aplicação de um intervalo  $x_{n+1} = f_\mu(x_n) = 4\mu x_n(1 - x_n)$ , em que  $x_n \in [0, 1]$  e  $\mu \in [0, 1]$  é um parâmetro. Analise os limites de estabilidade de todos os pontos fixos de período 1, em função de  $\mu$ .

**Exercício 3.2.** Seja o sistema dinâmico  $x_{n+1} = f(x_n)$ , em que  $f : I \rightarrow I$  e  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$ . Seja  $y_0$  um ponto fixo de período  $n$  do sistema dinâmico. Mostre que  $(f^n)'(f^j(y_0)) = (f^n)'(f^k(y_0))$  para todo  $k$  e  $j$ .

**Exercício 3.3.** Determine a solução geral do sistema dinâmico discreto

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n. \end{cases}$$



## Capítulo 4

# Classificação de pontos fixos

As equações diferenciais lineares ou as equações às diferenças lineares são integráveis no sentido em que se podem determinar explicitamente as suas soluções em função do tempo e das condições iniciais. Isto decorre do facto de ser sempre possível diagonalizar uma matriz complexa não singular (Apêndices B e C).

Vai-se agora determinar a estrutura topológica das curvas de fase das equações diferenciais lineares e das equações às diferenças lineares, em torno do único ponto fixo  $x = 0$ . Esta análise será feita apenas em dimensões 1 e 2.

**Equações diferenciais lineares em dimensão 1:** Seja  $\dot{x} = ax$ . Se  $a \neq 0$ , esta equação tem um único ponto fixo em  $x = 0$  e a solução geral é  $x(t) = x_0 e^{at}$ . Se  $a = 0$ , todos os pontos do espaço das fases são pontos fixos. Na figura 4.1 estão representadas as várias estruturas qualitativas do fluxo de fase para os vários valores do parâmetro  $a$ .

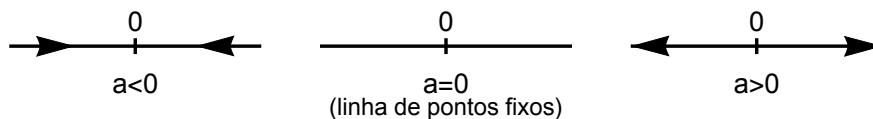


Figura 4.1: Fluxo de fases em torno do ponto fixo  $x = 0$  de uma equação diferencial linear em dimensão 1, em função do parâmetro  $a$ . Para  $a = 0$ , todos os pontos do espaço de fases são pontos fixos. Muitas vezes, estes pontos fixos designam-se por sumidouros ( $a < 0$ ) e por fontes ( $a > 0$ ).

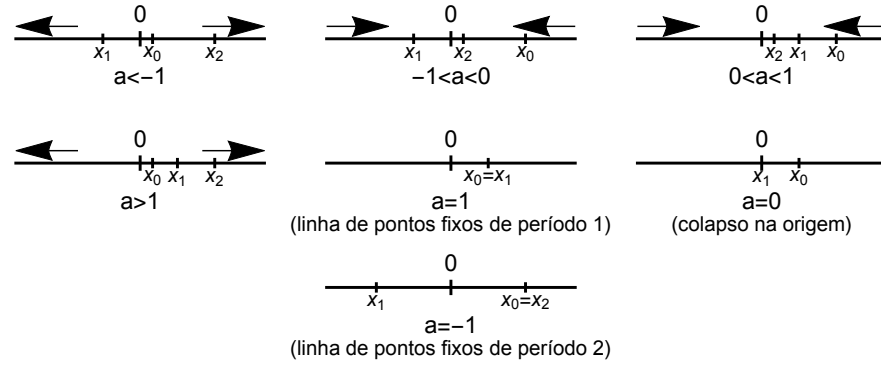


Figura 4.2: Fluxo de fases em torno do ponto fixo  $x = 0$  de uma equação às diferenças linear em dimensão 1, em função do parâmetro  $a$ .

**Equações às diferenças lineares em dimensão 1:**  $x_{n+1} = ax_n$ . Se  $a \neq \pm 1$ , esta equação tem um único ponto fixo em  $x = 0$  e a solução geral é  $x_n = x_0 a^n$ . Se  $a = 1$ , todos os pontos do espaço das fases são pontos fixos de período 1. Se  $a = -1$ , todos os pontos do espaço das fases são pontos fixos de período 2. Na figura 4.2 estão representadas as várias estruturas qualitativas do fluxo de fase para os vários valores do parâmetro  $a$ .

**Equações diferenciais lineares em dimensão 2:**  $\dot{y} = By$ , em que  $B$  é uma matriz de  $2 \times 2$ , com  $\det B \neq 0$ .

Neste caso, é sempre possível encontrar uma transformação de variáveis,  $x = Gy$ , em que  $G$  é uma matriz não singular,  $\det G \neq 0$ , e tal que  $\dot{x} = G\dot{y} = GBG^{-1}x = Ax$ . A matriz  $G$  pode ser escolhida de modo a que  $A$  assuma uma das seguintes formas (formas de Jordan):

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}_{\lambda \text{ e } \mu \text{ reais}}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}_{\lambda \text{ real}} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}_{\lambda = \alpha \pm i\beta}. \quad (4.1)$$

O sistema de equações lineares

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

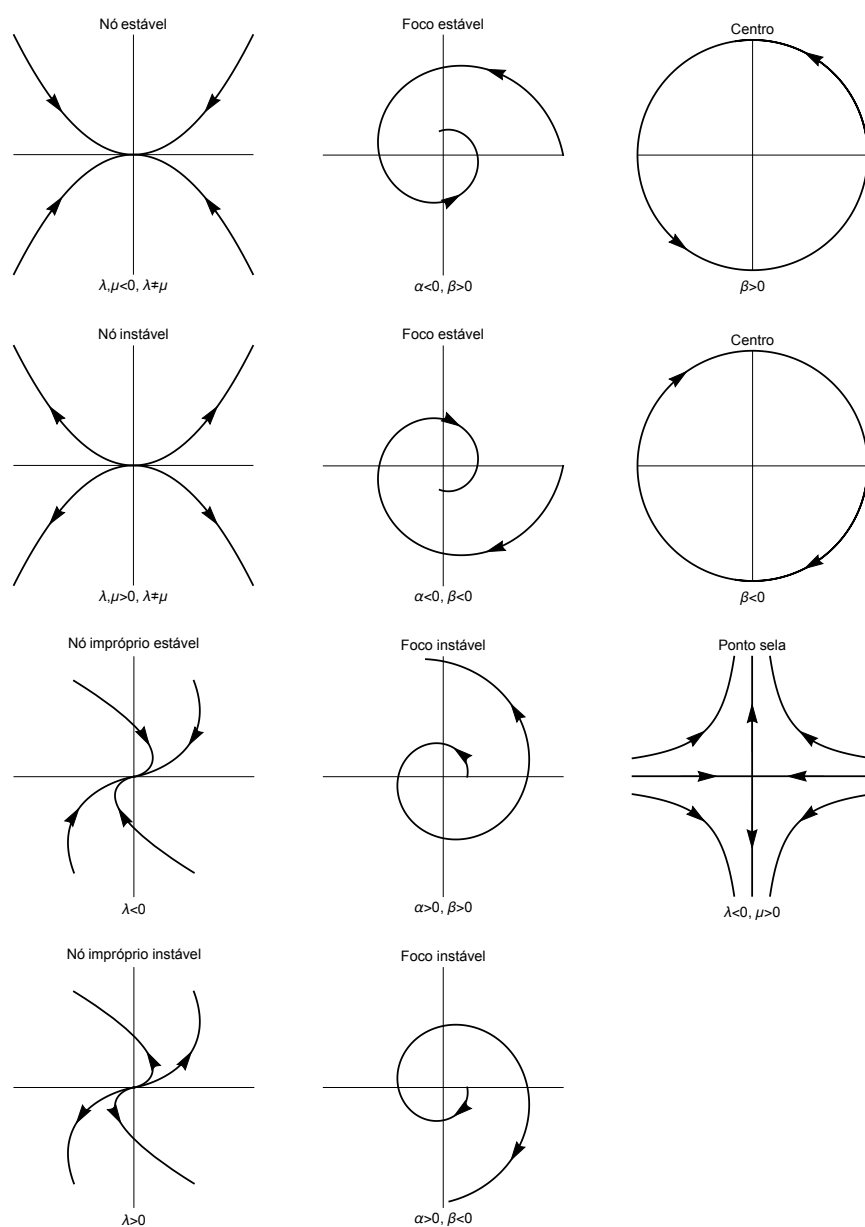


Figura 4.3: Estruturas topológicas dos fluxos de fase em torno do ponto fixo  $x=0$  das equações diferenciais lineares ou às diferenças lineares, em dimensão 2.

em que a matriz  $A$  tem uma das formas em (4.1), têm as soluções:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t) &= x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) &= y_0 e^{\mu t} \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) &= x_0 e^{\lambda t} + y_0 t e^{\lambda t} \\ y(t) &= y_0 e^{\lambda t} \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) &= e^{\alpha t} (x_0 \cos(\beta t) - y_0 \sin(\beta t)) \\ y(t) &= e^{\alpha t} (x_0 \sin(\beta t) + y_0 \cos(\beta t)) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para os casos não degenerados, isto é, quando  $\det A \neq 0$ , os comportamentos das órbitas (4.2), em torno do ponto fixo na origem, estão representados na figura 4.3. As estrutura topológica das curvas de fase obtém-se directamente de (4.2).

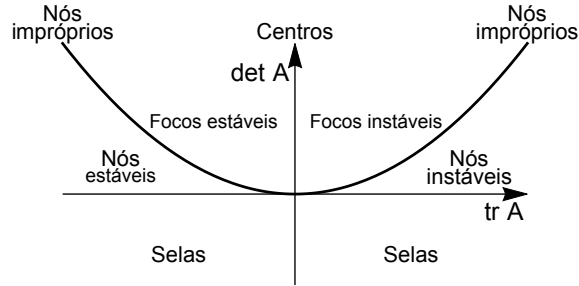


Figura 4.4: Classificação das órbitas de fase dos sistemas de equações lineares em dimensão 2, em função do traço e do determinante da matriz que define o campo de vectores.

**Definição 4.1.** Pontos fixos de equações diferenciais cujos jacobianos calculados nos pontos fixos só têm valores próprios fora do eixo imaginário do plano complexo são designados por *pontos fixos hiperbólicos*. Se os valores próprios de um ponto fixo são todos imaginários puros diferentes de 0, então o ponto fixo é do tipo elíptico ou *centro*.

Como a estrutura topológica dos sistemas lineares é determinada pelos valores próprios da matriz  $A$ , pode-se determinar qual a “abundância relativa” das várias estruturas topológicas da figura 4.3. Como, para uma matriz

$A$ , de  $2 \times 2$ , os valores próprios são

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2},$$

no espaço dos parâmetros  $(\text{tr} A, \det A)$ , a curva  $\det A = \text{tr} A^2/4$  delimita a região dos valores próprios complexos da região dos valores próprios reais. Então, com a informação da figura 4.3, pode-se representar, no espaço dos parâmetros  $(\text{tr} A, \det A)$ , as várias regiões topologicamente idênticas (figura 4.4).

Quando  $\det A = 0$ , caso degenerado, têm-se os vários casos representados na figura 4.5.

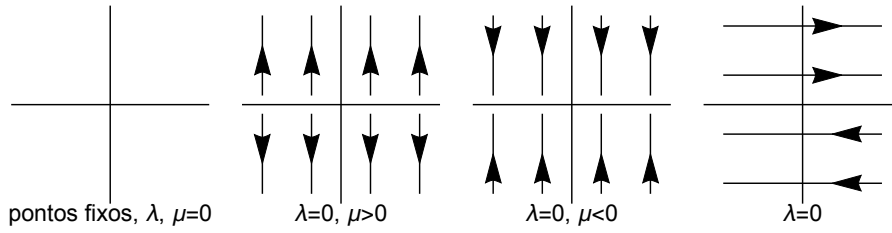


Figura 4.5: Fluxo de fases de uma equação diferencial linear no caso em que a matriz  $A$  é degenerada,  $\det A = 0$ . No primeiro caso, todos os pontos do plano  $\mathbb{R}^2$  são pontos fixos. Nos restantes casos, existe uma linha de pontos fixos.

**Equações às diferenças lineares em dimensão 2:** Seja a equação às diferenças

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

em que  $A$  tem uma das formas em (4.1). Assim, as soluções gerais do sistema de equações (4.3) são:

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n = \lambda^n x_0 \\ y_n = \mu^n y_0 \end{cases}$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_n = \lambda^n x_0 + n \lambda^{n-1} y_0 \\ y_n = \lambda^n y_0 \end{cases}$$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow z_n = z_0 \xi^n, \quad \xi = (\alpha^2 + \beta^2)^{i\theta} \text{ e } \theta = \arctg\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Neste caso, o círculo de raio unitário do plano complexo tem o mesmo papel que o eixo imaginário do plano complexo nas equações diferenciais, e as soluções da equação às diferenças (4.3) tem uma estrutura topológica no espaço de fases semelhante às curvas da figura 4.3. No entanto, as órbitas de fase não são curvas contínuas, mas sequências de pontos com uma estrutura topológica semelhante às soluções do caso contínuo.

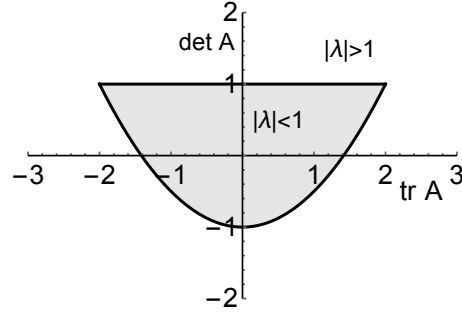


Figura 4.6: Regiões de estabilidade do ponto fixo na origem das equações às diferenças em dimensão 2, em função do traço e do determinante da matriz  $A$ . O ponto fixo na origem do sistema de equações às diferenças linear é estável se  $\det A \geq \text{tr } A^2/2 - 1$  e  $\det A \leq 1$ .

Na figura 4.6 estão representadas as regiões de estabilidade do ponto fixo na origem das equações às diferenças em dimensão 2, em função do traço e do determinante da matriz  $A$ . A região de estabilidade representada na figura é delimitada pelas curvas  $\det A = \text{tr } A^2/2 - 1$  e  $\det A = 1$ .

Nestas condições, pontos fixos das equações às diferenças com valores próprios fora do círculo unidade do plano complexo são *pontos fixos hiperbólicos*. Se  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , o ponto fixo na origem é *elíptico*.

Como é conhecido da álgebra linear, as matrizes são funções contínuas das entradas  $a_{ij}$ . Como uma matriz pode ser representada por um ponto no gráfico da figura 4.4, genericamente, pequenas perturbações nos coeficientes matriciais  $a_{ij}$  não induzem alterações do sinal do traço e do determinante da matriz  $A$ .<sup>1</sup> Assim, existem regiões no gráfico da figura 4.4 em que a estrutura topológica das soluções de equações diferenciais lineares não se alteram quando

<sup>1</sup>Uma perturbação genérica dos coeficientes matriciais  $a_{ij}$  origina alterações nos sinais do traço e do determinante de uma matriz apenas se  $\text{tr } A \neq 0$  e  $\det A \neq 0$ . Se  $\text{tr } A = 0$  ou  $\det A = 0$ , as alterações nos  $a_{ij}$  não são genéricas.



se efectuam pequenas variações nos  $a_{ij}$ . Por isto, diz-se que os focos, os nós e os pontos selas têm a propriedade de *estabilidade estrutural*.

**Definição 4.2.** Um sistema dinâmico é *estruturalmente estável* se uma pequena perturbação nas equações que definem o fluxo de fase não alteram a topologia das curvas de fase.

Formalmente, a propriedade de estabilidade estrutural está associada a uma métrica definida no espaço dos sistemas dinâmicos. Seja  $\mathcal{S}$  é o conjunto de todos os sistemas dinâmicos lineares e defina-se a norma da matriz  $A$  por,  $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ . O conjunto  $V_\varepsilon(A) = \{B : \|B - A\| < \varepsilon\}$  é uma vizinhança da matriz  $A$  em  $\mathcal{S}$ . Como  $\exp(At)$  é a solução da equação diferencial  $\dot{x} = Ax$ , esta equação é estruturalmente estável se para todo o  $B \in V_\varepsilon(A)$ , com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno,  $\exp(Bt)$  é topologicamente equivalente a  $\exp(At)$ . Assim, tem-se:

**Teorema 4.3** (estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos lineares [Arrowsmith et al., 1990]). *Uma equação diferencial linear [resp. equação às diferenças] é estruturalmente estável se a matriz  $A$  é não singular e se o ponto fixo  $x = 0$  é hiperbólico.*

Seja o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n,$$

e suponha-se que existe um ponto fixo em  $x = \bar{x}$ . O sistema linear associado à equação é

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi := A\xi, \quad \text{com } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

em que  $A$  é a matriz da aproximação linear em torno do ponto fixo  $\bar{x}$ , ou matriz jacobiana.

A relação entre as soluções do sistema linear e do sistema não-linear em torno do ponto fixo  $\bar{x}$  é estabelecida pelo teorema:

**Teorema 4.4** (Grobman-Hartman [Hartman, 1982]). *Se a matriz Jacobiana  $Df(\bar{x})$  não tem valores próprios nulos nem valores próprios sobre o eixo imaginário, existe um homeomorfismo  $h$ , definido numa vizinhança aberta  $\mathcal{U}$  de  $\bar{x}$ , que leva órbitas do sistema não-linear em órbitas do sistema linear. O homeomorfismo  $h$  preserva o sentido das órbitas e pode ser escolhido de maneira a preservar a parametrização no tempo.*<sup>2</sup>

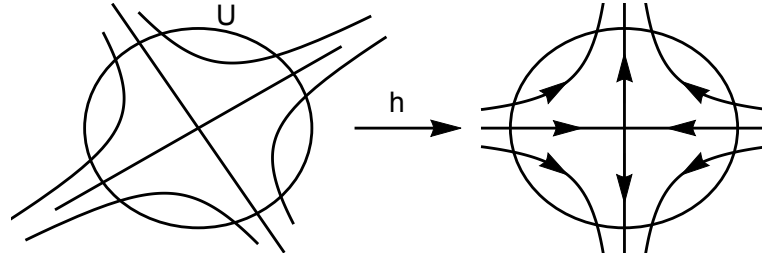


Figura 4.7: Órbitas no espaço de fases de um sistema dinâmico não-linear e da sua aproximação linear, na vizinhança  $U$  de um ponto fixo hiperbólico. A existência do homeomorfismo  $h$  é garantida pelo Teorema de Grobman-Hartman.

Assim, nos sistema não-lineares, na vizinhança de cada ponto fixo hiperbólico, as curvas de fase dos sistema não-lineares são topologicamente equivalentes às curvas de fase dos sistemas lineares locais. Esta propriedade, juntamente com o teorema da diferenciabilidade relativamente às condições iniciais, permite construir qualitativamente as órbitas de fase dos sistemas dinâmicos não lineares de dimensão finita. Pelo teorema de Hartman-Grobman, esta construção qualitativa tem o estatuto de um resultado exacto.

Por exemplo, para um sistema de equações não lineares em  $\mathbb{R}^2$  com apenas um ponto sela na origem, as órbitas no espaço de fases do sistema não linear são homeomorfas às órbitas do sistema linear (figura 4.7).

O teorema de Grobman-Hartman mantém-se válido para as equações às diferenças, desde que os valores próprios das matrizes de aproximação linear não estejam sobre a circunferência de raio unitário do plano complexo.

---

**Exercício 4.1.** Seja a equação diferencial do pêndulo

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin(x), \end{cases}$$

em que  $\omega$  é uma constante positiva. Determine os pontos fixos e analise a sua estabilidade. Se encontrar pontos fixos não hiperbólicos, para determinar a sua estabilidade, encontre uma função de Lyapunov. Esboce qualitativamente o fluxo de fase.

---

<sup>2</sup>Um homeomorfismo preserva o sentido das órbitas se a sua matriz jacobiana tem determinante positivo.

**Exercício 4.2.** Seja a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} &= |y| \\ \dot{y} &= -x. \end{cases}$$

Faça o estudo qualitativo das órbitas de fase e esboce qualitativamente o fluxo de fase.

**Exercício 4.3.** Determine qualitativamente o tipo de soluções do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \varepsilon x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \varepsilon y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

em que  $\varepsilon$  é um parâmetro real, positivo ou negativo.

